Matemaatikaolümpiaad “Balti tee 2005”

Stockholmis, 5. novembril 2005

1. Olgu a_0 positiivne täisarv. Jada $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ defineeritakse järgmiselt: kui

$$a_n = \sum_{i=0}^{j} c_i 10^i ,$$

kus c_i on täisarvud, nii et $0 \leqslant c_i \leqslant 9$, siis

$$a_{n+1} = c_0^{2005} + c_1^{2005} + \cdots + c_j^{2005} .$$

Kas on võimalik valida a_0 nii, et selle jada kõik liikmed on erinevad?

2. Olgu α, β ja γ kolm sellist nurka, et $0 \leqslant \alpha, \beta, \gamma < 90^\circ$ ja $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 1$. Tõesta, et

$$\tan^2\alpha + \tan^2\beta + \tan^2\gamma \geqslant \frac{3}{8} .$$

3. Jada $\{a_k\}_{k\geqslant 1}$ on antud seostega $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$ ja

$$a_{k+2} = a_k + \frac{1}{2}a_{k+1} + \frac{1}{4a_k a_{k+1}} \quad \text{iga } k \geqslant 1 \text{ korral.}$$

Tõesta, et

$$\frac{1}{a_1 a_3} + \frac{1}{a_2 a_4} + \frac{1}{a_3 a_5} + \cdots + \frac{1}{a_{98} a_{100}} < 4 .$$

4. Leia kolm erinevat reaalarvuliste kordajatega polünoomi $P(x)$, mis rahuldavad iga reaalarvu x korral tingimust $P(x^2+1) = P(x)^2 + 1$.

5. Olgu a, b ja c sellised positiivsed reaalarvud, et $abc = 1$. Tõesta, et

$$\frac{a}{a^2+2} + \frac{b}{b^2+2} + \frac{c}{c^2+2} \leqslant 1 .$$

6. Olgu K ja N sellised positiivsed täisarvud, et $1 \leqslant K \leqslant N$. Kaardipakis on N kaarti. Paki segamiseks muudetakse K pealmise kaardi järjekord vastupidiseks ja tõstetakse need kaardid paki põhja. Tõesta, et ülimalt $4 \cdot N^2/K^2$ sellise sammu järel on kõik kaardid uuesti esialgses järjestuses.

7. Tabelis on n rida ja 6 veergu, kus $n > 2$. Tabeli igasse lahtrisse kirjutatakse 0 või 1, nii et tabeli kõik read on erinevad. On teada, et tabeli iga kahe rea $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ ja $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$ jaoks leidub tabelis ka rida $(x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_4, x_5y_5, x_6y_6)$. Tõesta, et tabelis leidub veerg, kus vähemalt pooltes lahtrites on nullid.

8. Ruudustik koosneb 25×25 ühikruudust. Mööda ruudustiku jooni tohib punase pliiatsiga joonistada suvaliste küljepikkustega ruutude kontuure. Mitu kontuuri tuleb vähemalt joonistada, et katta värviga kõik ruudustiku jooned?

9. Ristkülik koosneb 200×3 ühikruudust. Tõesta, et võimalusi jaotada see ristkülik väiksemateks ristkülikuteks suurusega 1×2 on kolmega jaguv arv.

10. Olgu $m = 30030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ ja olgu M arvu m selliste positiivsete jagajate hulk, millel on täpselt kaks algtegurit. Leia vähim positiivne täisarv n, millel on järgmine omadus: valides ükskõik millised n arvu hulgast M, leidub nende seas kolm arvu a, b ja c, nii et $a \cdot b \cdot c = m$.

11. Kolmnurga ABC külgedel BC ja AC võetakse vastavalt punktid D ja E, nii et $|BD| = |AE|$. Kolmnurkade ADC ja BEC ümberringjoonte keskpunkte läbiv sirge lõikab sirgeid AC ja BC vastavalt punktides K ja L. Tõesta, et $|KC| = |LC|$.

12. Olgu $ABCD$ kumer nelinurk, kus $|BC| = |AD|$. Olgu M ja N vastavalt külgede AB ja CD keskpunktid. Sirged AD ja BC lõikavad sirget MN vastavalt punktides P ja Q. Tõesta, et $|CQ| = |DP|$.

13. Kui palju on vähemalt vaja ringe raadiusega $\sqrt{2}$, et katta ristkülik mõõtmetega
    a) 6×3;
    b) 5×3?

14. Kolmnurga ABC mediaanid lõikuvad punktis M. Olgu D ja E sellised erinevad punktid sirgel BC, et $|DC| = |CE| = |AB|$ ning olgu punktid P ja Q valitud vastavalt lõikudel BD ja BE selliselt, et $2 \cdot |BP| = |PD|$ ja $2 \cdot |BQ| = |QE|$. Leia nurga PMQ suurus.

15. Sirged e ja f ristuvad punktis H. Punktid A ja B asuvad sirgel e ning punktid C ja D asuvad sirgel f, kusjuures punktid A, B, C, D ja H on paarikaupa erinevad. Sirged b ja d läbivad vastavalt punkte B ja D ning on risti sirgega AC. Sirged a ja c läbivad vastavalt punkte A ja C ning on risti sirgega BD. Sirgete a ja b lõikepunkt on X ning sirgete c ja d lõikepunkt on Y. Tõesta, et sirge XY läbib punkti H.

16. Olgu p algarv ja n positiivne täisarv. Olgu q arvu $(n+1)^p - n^p$ mingi positiivne jagaja. Tõesta, et $q - 1$ jagub arvuga p.

17. Jada $\{x_n\}_{n \geqslant 0}$ on antud seostega $x_0 = a$, $x_1 = 2$ ja $x_n = 2x_{n-1}x_{n-2} - x_{n-1} - x_{n-2} + 1$ iga $n > 1$ korral. Leia kõik sellised täisarvud a, et $2x_{3n} - 1$ on täisruut iga $n \geqslant 1$ korral.

18. Olgu x ja y sellised positiivsed täisarvud, et $z = 4xy/(x+y)$ on paaritu täisarv. Tõesta, et vähemalt üks arvu z jagaja esitub kujul $4n - 1$, kus n on positiivne täisarv.

19. Kas leidub 2005 paarikaupa erinevat positiivset täisruutu, mille summa on samuti täisruut?

20. Leia kõik positiivsed täisarvud $n = p_1 p_2 \ldots p_k$, mis jagavad arvu $(p_1 + 1)(p_2 + 1) \cdots (p_k + 1)$, kus $p_1 p_2 \ldots p_k$ on arvu n esitus (mitte tingimata erinevate) algarvude korrutisena.