Mathematical Competition Baltic Way 2004

Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics, 07.11.2004

Длительность олимпиады 4,5 часов
Вопросы принимаются в письменном виде первые 30 минут.

1. Дана последовательность a_1, a_2, a_3, ... неотрицательных вещественных чисел. Известно, что при всех n

   1. $a_n + a_{2n} \geqslant 3n$.
   2. $a_{n+1} + n \leqslant 2\sqrt{a_n \cdot (n+1)}$.

   (a) Докажите, что $a_n \geqslant n$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Приведите пример такой последовательности.

2. Дан многочлен $P(x)$ с неотрицательными коэффициентами. Докажите, что если неравенство
$$P(x) \cdot P(1/x) \geqslant 1$$
выполняется при $x = 1$, то оно выполняется и при любом положительном x.

3. Пусть p, q, r — положительные числа, $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что
$$\frac{1}{p^n + q^n + 1} + \frac{1}{q^n + r^n + 1} + \frac{1}{r^n + p^n + 1} \leqslant 1.$$

4. Пусть x_1, x_2, ..., x_n — вещественные числа, X — их среднее арифметическое. Докажите, что для некоторого $k \leqslant n$ у каждого из наборов $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, $\{x_2, \ldots, x_k\}$, $\{x_3, \ldots, x_k\}$, ..., $\{x_{k-1}, x_k\}$, $\{x_k\}$ среднее арифметическое не превосходит X.

5. Определите множество значений функции, заданной при всех целых k,
$$f(k) = (k)_3 + (2k)_5 + (3k)_7 - 6k,$$
где через $(k)_{2n+1}$ обозначено ближайшее к числу k кратное числа $2n+1$.

6. На каждой из шести граней куба написано натуральное число. Для каждой вершины куба вычислили произведение чисел, стоящих на трех гранях, содержащих эту вершину. Сумма полученных произведений равна 1001. Найдите сумму шести чисел, стоящих на гранях.

7. Множество X, состоящее из натуральных чисел содержит не менее двух элементов и для любых m, $n \in X$, $n > m$, найдется такое $k \in X$, что $n = mk^2$. Найдите все такие множества X.

8. Дан непостоянный многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами. Докажите, что существует такое целое число n, что $f(n)$ имеет не менее 2004 различных простых делителей.

9. Множество S состоит из $n-1$ натуральных чисел ($n \geqslant 3$). Известно, что среди них есть два числа, разность которых не делится на n. Докажите, что из множества A можно выбрать несколько чисел, сумма которых делится на n.

10. Существует ли такая бесконечная последоватльность простых чисел p_1, p_2, ..., что при всех n
$$|p_{n+1} - 2p_n| = 1?$$

11. В клетках таблицы $m \times n$ расставлены числа $+1$ и -1. Вначале в таблице стоит ровно одно число -1. За один ход разрешается выбрать любую клетку, содержащую -1, заменить в ней -1 на 0 и одновременно с этим умножить все числа в соседних (по стороне) клетках на -1. Для каких пар (m, n) с помощью таких ходов, при любом начальном положении клетки с числом -1, можно получить таблицу, содержащую только нули?

12. В строчку выписаны $2n$ попарно различных чисел. За один ход разрешается либо поменять местами любые два числа, либо переставить по циклу любые три числа (т. е. выбрать числа a, b, c и поставить a на место b, b на место c, c на место a). За какое нименьшее количество ходов заведомо можно расставить все числа по возрастанию?

13. Европейский Союз, в который входят 25 стран, учредил комитет, заседающий по следующими правилам: 1) каждый день проходит одно заседание; 2) на каждом заседании присутствует представитель хотя бы одной страны; 3) на разных заседаниях должны быть представлены разные наборы стран; 4) для всех n, k $(k < n)$ на n-м заседании должен присутствовать представитель хотя бы одной из страны, присутствовавшей на k-м заседании.

    В течение какого наибольшего количества дней могут проходить эти заседания?

14. Будем называть *кучей* множество из четырех или более орехов. На столе лежит куча из $n \geqslant 4$ орехов. Двое играют в следующую игру. За один ход можно выбрать любую кучу и разделить ее на две непустые части (части не обязательно должны быть кучами, они могут содержать любое число орехов). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. При каких n первый игрок имеет выигрышную стратегию?

15. Круг разделен на 13 секторов, занумерованных последовательно числами то 1 до 13. В секторах 1, 2, 3, 4 и 5 сидят блохи A, B, C, D и E соответственно. За один ход блоха может прыгнуть из своего сектора в другой, находящийся на 5 секторов правее или левее (например, из сектора 1 в сектор 6 или 9), если этот сектор пуст. Через несколько ходов блохи вернулись в секторы 1, 2, 3, 4, 5, возможно, в другом порядке. В каком порядке они могут в них располагаться?

16. Через точку P, лежащую вне данной окружности, проведены касательная PC (C — точка касания) и секущая, которая пересекает окружность в точках A и B. Кроме того через P проведена прямая, содержащая диаметр окружности, причем точки A, B и C лежат по одну сторону от этой прямой. Точка Q — основание перпендикуляра, опущенного из C на проведенный диаметр. Докажите, что прямая QC — биссектриса угла $\angle AQB$.

17. Дан прямоугольник со сторонами 3 и 4. Внутри каждой его стороны отмечено по точке. Пусть x, y, z, t — длины сторон четырехугольника с вершинами в этих точках. Докажите, что
$$25 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \leqslant 50.$$

18. Луч, выходящий из вершины A треугольника ABC, пересекает сторону BC в точке X, а описанную окружность треугольника — в точке Y. Докажите, что
$$\frac{1}{AX} + \frac{1}{XY} \geqslant \frac{4}{BC}.$$

19. Точка D — середина стороны BC треугольника ABC. На стороне BC выбрана такая точка M, что $\angle BAM = \angle DAC$. Пусть L — вторая точка пересечения стороны AB с описанной окружностью треугольника CAM, K — вторая точка пересечения стороны AC с описанной окружностью треугольника BAM. Докажите, что $KL \parallel BC$.

20. На плоскости даны точки A и B. По одну сторону от прямой AB проведены три дуги окружностей; каждая из дуг имеет концы в точках A и B. Обозначим эти дуги через w_1, w_2, w_3 (w_2 лежит между w_1 и w_3.) Из точки B проведены два луча, пересекающих эти дуги в точках M_1, M_2, M_3 и K_1, K_2, K_3 соответственно. Докажите, что $\dfrac{M_1M_2}{M_2M_3} = \dfrac{K_1K_2}{K_2K_3}$.