Norwegian version

Matematisk konkurranse Baltic Way 2004

Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics, 7. november 2004

Oppgaver

1. Gitt en følge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ av ikke-negative reelle tall som tilfredsstiller

1. $a_n + a_{2n} \geq 3n$,
2. $a_{n+1} + n \leq 2\sqrt{a_n \cdot (n+1)}$

for alle indekser $n = 1, 2, \ldots$

(a) Vis at ulikheten $a_n \geq n$ holder for alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Gi et eksempel på en slik følge.

2. La $P(x)$ være et polynom med ikke-negative koeffisienter. Vis at dersom $P(\frac{1}{x})P(x) \geq 1$ for $x = 1$ så holder samme ulikhet for alle positive x.

3. La p, q, r være positive reelle tall og $n \in \mathbb{N}$. Vis at dersom $pqr = 1$, så

$$\frac{1}{p^n + q^n + 1} + \frac{1}{q^n + r^n + 1} + \frac{1}{r^n + p^n + 1} \leq 1.$$

4. La $x_1, x_2, \ldots, x_n$ være relle tall med aritmetisk gjennomsnitt X. Vis at det finnes et positivt heltall K slik at det aritmetiske gjennomsnittet av hver av følgene $\{x_1, x_2, \ldots, x_K\}$, $\{x_2, x_3, \ldots, x_K\}$, $\{x_3, \ldots, x_K\}$, $\ldots$, $\{x_{K-1}, x_K\}$, $\{x_K\}$ ikke er større enn X.

5. La $(k)_{2n+1}$ angi multiplet av $2n + 1$ nærmest k.
Finn alle verdier funksjonen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ gitt ved

$$f(k) = (k)_3 + (2k)_5 + (3k)_7 - 6k \ \ (k \text{ heltall})$$

kan anta (verdimengden til f).

6. På hver av de seks sidene på en kube skrives det et positivt heltall. For hvert av de åtte hjørnene beregner vi produktet av tallene på de tre tilstøtende sidene. Summen av disse åtte produktene er 1001. Hva er summen av de seks tallene på kubesidene?

7. Finn alle mengder X av minst to positive heltall slik at for hvert par $m, n \in X$, hvor $n > m$, finnes det en $k \in X$ slik at $n = mk^2$.

8. La $f(x)$ være et ikke-konstant polynom med heltallige koeffisienter. Vis at det eksisterer en $n \in \mathbb{Z}$ slik at $f(n)$ har minst 2004 distinkte primfaktorer.

9. En mengde S av n-1 naturlige tall er gitt ($n \geq 3$). Det finnes minst to elementer i denne mengden som har differanse ikke delelig med n. Vis at det er mulig å velge en ikke-tom delmengde av S slik at summen av elementene er delelig med n.

10. Finnes det en uendelig følge av primtall $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots$ s.a. $|p_{n+1} - 2p_n| = 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$?

11. Vi har et brett på $m \times n$ ruter. Til å begynne med inneholder en av disse rutene -1, og alle de andre inneholder 1. Et trekk består i å velge en rute med -1, erstatte denne -1 med 0, og gange alle naborutene med -1 (to ruter er naboer hvis de har en felles sidekant). Finn alle par (m, n) slik at man alltid kan oppnå et brett med bare nuller, uavhengig av hvilken rute som inneholder -1 i utgangspunktet.

12. Det er $2n$ forskjellige tall i en rad. På et trekk kan man enten bytte om på to tall, eller man kan bytte om på 3 tall syklisk (dvs. velg a, b, c og plasser a der b stod, b der c stod, og c der a stod). Hva er minste antallet trekk som alltid er tilstrekkelig til å sortere tallene i stigende rekkefølge?

13. De 25 medlemslandene i EU setter opp en komité med følgende byråkratiske regler: 1) komiteen skal holde møte hver dag; 2) ved hvert møte må minst ett medlemsland delta; 3) møter på forskjellige dager må ha forskjellig mengde av deltakende land; og 4) for hvert par av møter må det finnes et land som er med på begge. Hvor lenge kan komiteen holde på?

14. Vi sier at en bunke med minst fire kort er en superbunke. To personer spiller følgende spill: De begynner med en superbunke med $n \geq 4$ kort. Et lovlig trekk består i å ta en superbunke og dele den i to ikke-tomme bunker (ikke nødvendigvis superbunker). Når en spiller ikke kan gjøre et trekk, taper han. For hvilke verdier av n har den første spilleren en vinnende strategi?

15. Et fjøs består av 13 båser nummerert 1 til 13 arrangert i en sirkel. Fem kuer kalt A, B, C, D og E står i båsene 1, 2, 3, 4 og 5. En ku kan hoppe til en tom bås nøyaktig fem posisjoner unna i valgfri retning rundt sirkelen. Det er ikke plass til mer enn én ku i en bås om gangen. To kuer kan heller ikke hoppe samtidig. Etter en del hopp, er kuene tilbake i båsene 1,2,3,4,5, men kanskje i en annen rekkefølge enn da de begynte. Hvilke rekkefølger er mulige?

16. Gjennom punktet P utenfor en gitt sirkel passerer en sekant og en tangent til sirkelen. Sekanten skjærer sirkelen i A og B, og tangenten tangerer sirkelen i C på samme side av diameteren gjennom P som A and B. Fotpunktet til normalen fra C på diameteren er Q. Vis at QC halverer $\angle AQB$.

17. Betrakt et rektangel med sidelengder 3 og 4, og velg et vilkårlig indre punkt på hver av sidene. La x, y, z og u betegne sidelengdene i firkanten dannet av disse fire punktene.
Vis at $25 \leq x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \leq 50$.

18. En stråle (halvlinje) fra hjørnet A i trekanten ABC skjærer siden BC i X og omsirkelen til ABC i Y. Vis at $\frac{1}{AX} + \frac{1}{XY} \geq \frac{4}{BC}$.

19. D er midtpunktet på siden BC av en gitt trekant ABC. M er et punkt på siden BC slik at $\angle BAM = \angle DAC$. L er det andre skjæringspunktet til siden AB med omsirkelen til trekanten CAM. K er det andre skjæringspunktet til siden AC med omsirkelen til trekanten BAM. Vis at $KL \parallel BC$.

20. Tre sirkelbuer w_1, w_2, w_3 med felles endepunkter A og B ligger på samme side av linjen AB; w_2 ligger mellom w_1 og w_3. To stråler fra B skjærer disse buene i henholdsvis M_1, M_2, M_3 og K_1, K_2, K_3.
Vis at $\frac{M_1M_2}{M_2M_3} = \frac{K_1K_2}{K_2K_3}$.