German version

Mathematik–Teamwettbewerb Baltic Way 2004

Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics, 07.11.2004

Aufgaben – Bearbeitungszeit 4,5 Stunden

1. Gegeben sei eine Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ nichtnegativer reeller Zahlen, die die folgenden beiden Bedingungen für alle $n = 1, 2, \ldots$ erfüllen:

1. $a_n + a_{2n} \geq 3n$,
2. $a_{n+1} + n \leq 2\sqrt{a_n \cdot (n+1)}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Ungleichung $a_n \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine solche Folge an.

2. Es sei $P(x)$ ein Polynom mit nichtnegativen Koeffizienten. Zeigen Sie: Wenn $P(\frac{1}{x})P(x) \geq 1$ für $x = 1$ gilt, dann gilt diese Ungleichung für alle positiven x.

3. Seien p, q, r positive reelle Zahlen sowie $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Wenn $pqr = 1$ gilt, dann auch

$$\frac{1}{p^n + q^n + 1} + \frac{1}{q^n + r^n + 1} + \frac{1}{r^n + p^n + 1} \leq 1.$$

4. Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reelle Zahlen und X ihr arithmetisches Mittel. Beweisen Sie: Es existiert eine positive ganze Zahl K, so dass das arithmetische Mittel der Zahlen in jeder der Listen $\{x_1, x_2, \ldots, x_K\}$, $\{x_2, x_3, \ldots, x_K\}$, $\{x_3, \ldots, x_K\}$, $\ldots$, $\{x_{K-1}, x_K\}$, $\{x_K\}$ nicht größer als X ist.

5. Bestimmen Sie den Wertebereich der für ganze Zahlen k definierten Funktion

$$f(k) = (k)_3 + (2k)_5 + (3k)_7 - 6k\,.$$

Hierbei bedeutet $(k)_{2n+1}$ dasjenige Vielfache von $2n + 1$, das am dichtesten an k liegt.

6. Auf jede der sechs Seitenflächen eines Würfels wird eine positive ganze Zahl geschrieben. Für jede Ecke des Würfels berechnen wir das Produkt der Zahlen auf den drei angrenzenden Flächen. Die Summe dieser Produkte beträgt 1001. Welchen Wert hat die Summe der Zahlen auf den sechs Würfelflächen?

7. Bestimmen Sie alle Mengen X aus mindestens zwei positiven ganzen Zahlen, die die folgende Eigenschaft aufweisen: Für je zwei Elemente $m, n \in X$ mit $n > m$ gibt es ein $k \in X$ mit $n = mk^2$.

8. Sei $f(x)$ ein nicht konstantes Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Zeigen Sie: Es gibt eine ganze Zahl n, so dass $f(n)$ mindestens 2004 verschiedene Primfaktoren hat.

9. Gegeben sei eine Menge S aus $n-1$ natürlichen Zahlen ($n \geq 3$). In dieser Menge gibt es mindestens zwei Elemente, deren Differenz sich nicht durch n teilen lässt. Beweisen Sie: Man kann unter diesen Voraussetzungen eine nichtleere Teilmenge von S derart wählen, dass die Summe ihrer Elemente durch n teilbar ist.

10. Gibt es eine unendliche Folge $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots$ von Primzahlen, so dass $|p_{n+1} - 2p_n| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt?

11. In genau Zelle eines $m \times n$-Feldes steht anfänglich eine -1, in allen anderen Zellen eine $+1$. Ein Zug besteht darin, irgendeine Zelle mit dem Eintrag -1 auszuwählen, diese -1 durch eine 0 zu ersetzen und die Einträge in allen benachbarten Zellen mit -1 zu multiplizieren. Dabei heißen zwei Zellen benachbart, wenn sie eine gemeinsame Seite haben.
Bestimmen Sie alle Paare (m, n), für die man, unabhängig von der Position der -1 am Anfang, durch eine endliche Folge solcher Züge erreichen kann, dass in allen Feldern 0 steht.

12. Jede von $2n$ verschiedenen Zahlen wird auf einen Zettel geschrieben. Die Zettel werden hintereinander gelegt. In einem Zug können wir entweder zwei beliebige Zettel vertauschen oder drei Zettel zyklisch vertauschen. (Zyklische Vertauschung von a, b, c bedeutet: a kommt an die Stelle von b, b an die Stelle von c und c an die Stelle von a.) Welche Minimalzahl von Zügen garantiert, dass man, unabhängig von der anfänglichen Anordnung, mit dieser Zahl von Zügen die Zahlen auf den Zetteln (aufsteigend) der Größe nach ordnen kann?

13. Die 25 Mitgliedsstaaten der Europäischen Union setzen ein Komitee ein, das nach folgenden Regeln arbeitet:
1) Das Komitee trifft sich täglich.
2) Bei jedem Treffen muss mindestens ein Mitgliedsstaat repräsentiert sein.
3) Bei keinen zwei Treffen sind genau die gleichen Mitgliedsstaaten repräsentiert.
4) Für je zwei Treffen gibt es einen Staat, der auf beiden Treffen repräsentiert ist.
An wie vielen Tagen kann sich das Komitee höchstens treffen?

14. Ein Haufen ist eine Menge von vier oder mehr Nüssen. Zwei Personen spielen das folgende Spiel: Sie beginnen mit einem Haufen von $n \geq 4$ Nüssen. Ein Zug besteht darin, einen Haufen in zwei nichtleere Teile zu zerlegen. (Die Teile müssen nicht unbedingt Haufen sein.) Wenn ein Spieler nicht mehr ziehen kann, hat er verloren. Für welche Werte von n hat der erste Spieler eine Gewinnstrategie?

15. Ein Kreis ist in 13 Segmente zerlegt, die von 1 bis 13 durchnummeriert sind. Fünf Flöhe mit den Namen A, B, C, D, E sitzen in den Segmenten 1, 2, 3, 4, 5. Ein Floh darf in beliebige Richtung genau fünf Segmente weiter springen, falls das Segment frei ist. Keine zwei Flöhe springen gleichzeitig. Nach einer Anzahl von Sprüngen sitzen die Flöhe wieder in den Segmenten 1, 2, 3, 4, 5, aber nicht unbedingt in der ursprünglichen Reihenfolge. Welche Reihenfolgen sind möglich?

16. Durch einen Punkt P außerhalb eines gegebenen Kreises gehen eine Sekante und eine Tangente an den Kreis. Die Sekante schneidet den Kreis in den Punkten A und B. Die Tangente berührt den Kreis im Punkt C, wobei die Punkte A, B und C auf derselben Seite der Geraden durch P und den Kreismittelpunkt liegen. Q sei der Fußpunkt des Lotes von C auf diese Gerade.
Beweisen Sie, dass QC die Winkelhalbierende des Winkels $\angle AQB$ ist.

17. Auf jeder der Seiten eines Rechtecks mit den Seitenlängen 3 und 4 sei ein innerer Punkt gewählt. Die Seitenlängen des von diesen Punkten aufgespannten Vierecks seien mit x, y, z und u bezeichnet. Beweisen Sie die Ungleichung $25 \leq x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \leq 50$.

18. Ein Strahl, der vom Eckpunkt A eines Dreiecks ABC ausgeht, schneidet die Seite BC in X und den Umkreis des Dreiecks ABC in Y. Beweisen Sie, dass dann $\frac{1}{AX} + \frac{1}{XY} \geq \frac{4}{BC}$ gilt.

19. D sei der Mittelpunkt der Seite BC eines Dreiecks ABC. M sei der Punkt auf der Seite BC, für den $\angle BAM = \angle DAC$ gilt. L sei der andere Schnittpunkt des Umkreises des Dreiecks CAM mit der Seite AB. K sei der andere Schnittpunkt des Umkreises des Dreiecks BAM mit der Seite AC. Zeigen Sie, dass dann $KL \parallel BC$.

20. Drei Kreisbögen w_1, w_2, w_3 mit den gemeinsamen Endpunkten A and B liegen auf derselben Seite der Geraden AB, wobei w_2 zwischen w_1 und w_3 liegt. Zwei von B ausgehende Strahlen schneiden die Kreisbögen in M_1, M_2, M_3 beziehungsweise in K_1, K_2, K_3. Beweisen Sie: $\frac{M_1M_2}{M_2M_3} = \frac{K_1K_2}{K_2K_3}$.