Matemaatikaolümpiaad "Balti tee 2004"

Vilniuses, 7. novembril 2004

1. Mittenegatiivsete reaalarvude jada $a_1, a_2, a_3, \ldots$ rahuldab tingimusi
   1. $a_n + a_{2n} \geqslant 3n$,
   2. $a_{n+1} + n \leqslant 2\sqrt{a_n \cdot (n+1)}$

   iga indeksi $n = 1, 2, \ldots$ korral.

   (a) Tõesta, et iga n korral kehtib võrratus $a_n \geqslant n$.

   (b) Too näide ülesande tingimusi rahuldavast jadast.

2. Olgu $P(x)$ mittenegatiivsete reaalarvuliste kordajatega polünoom. Tõesta, et kui $P\left(\frac{1}{x}\right)P(x) \geqslant 1$ kehtib $x = 1$ korral, siis kehtib see võrratus kõigi positiivsete reaalarvude x korral.

3. Olgu p, q, r positiivsed reaalarvud ja olgu n positiivne täisarv. Tõesta, et kui $pqr = 1$, siis
$$\frac{1}{p^n + q^n + 1} + \frac{1}{q^n + r^n + 1} + \frac{1}{r^n + p^n + 1} \leqslant 1 .$$

4. Olgu X reaalarvude $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aritmeetiline keskmine. Tõesta, et leidub positiivne täisarv k, nii et ühegi järjendi $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $(x_2, x_3, \ldots, x_k)$, $(x_3, \ldots, x_k)$, $\ldots$, (x_{k-1}, x_k), (x_k) elementide aritmeetiline keskmine ei ole suurem arvust X.

5. Olgu funktsioon f defineeritud täisarvudel võrdusega
$$f(k) = (k)_3 + (2k)_5 + (3k)_7 - 6k ,$$
kus $(k)_{2n+1}$ tähistab arvule k lähimat arvu $2n + 1$ kordset. Leia funktsiooni f muutumispiirkond.

6. Kuubi igale tahule on kirjutatud positiivne täisarv. Kuubi iga tipu jaoks arvutatakse tema kolmel naabertahul olevate arvude korrutis. Nende korrutiste summa on 1001. Leia kuubi tahkudele kirjutatud kuue arvu summa.

7. Leia kõik hulgad X, mis koosnevad vähemalt kahest positiivsest täisarvust, nii et hulga X mistahes kahe elemendi m, n jaoks (kus $n > m$) leidub selline element k hulgast X, et $n = mk^2$.

8. Olgu $f(x)$ mittekonstantne täisarvuliste kordajatega polünoom. Tõesta, et leidub selline täisarv n, et arvul $f(n)$ on vähemalt 2004 erinevat algtegurit.

9. Olgu S positiivsete täisarvude hulk, milles on $n - 1$ elementi ($n \geqslant 3$). On teada, et hulgas S leidub vähemalt kaks elementi, mille vahe ei jagu arvuga n. Tõesta, et leidub hulga S mittetühi alamhulk, mille elementide summa jagub arvuga n.

10. Kas leidub lõpmatu algarvude jada $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots$, kus $|p_{n+1} - 2p_n| = 1$ iga n korral?

11. Tabelis mõõtmetega $m \times n$ on igasse lahtrisse kirjutatud arv $+1$ või -1. Esialgu on täpselt ühes lahtris -1 ja kõigis ülejäänud lahtrites $+1$. Igal sammul on lubatud valida lahter, kuhu on kirjutatud -1, asendada see arvuga 0 ja korrutada kõik naaberlahtrites asuvad arvud läbi arvuga -1 (ütleme, et kaks lahtrit on naabrid, kui neil on ühine külg). Leia kõik paarid (m, n), mille korral selliste käikudega on võimalik jõuda seisu, kus tabeli kõigis lahtrites on arv 0, sõltumata sellest, millises lahtris arv -1 algul asus.

12. Ritta on kirjutatud $2n$ erinevat arvu. Igal käigul on lubatud vahetada suvalise kahe arvu asukoht või vahetada tsükliliselt suvalise kolme arvu asukoht (s.t. valida mingid arvud a, b, c ning asendada arv a arvuga b, arv b arvuga c ja arv c arvuga a). Leia vähim käikude arv, millega on alati võimalik arvud kasvavasse järjekorda seada.

13. Euroopa Liidu 25 liikmesriiki asutasid komitee järgnevate reeglite alusel:
    1) iga päev toimub komitee koosolek;
    2) igal koosolekul peab esindatud olema vähemalt üks liikmesriik;
    3) mistahes kahel erineval koosolekul on esindatud liikmesriikide hulk erinev;
    4) mistahes $k < n$ korral on n-ndal koosolekul esindatud riikide hulgas vähemalt üks riik, kes oli esindatud ka k-ndal koosolekul.

    Mitu päeva saab see komitee koosolekuid pidada?

14. Nimetame *kuhjaks* hulka, milles on vähemalt neli pähklit. Kaks mängijat mängivad järgmist mängu. Algul on neil üks kuhi $n \geqslant 4$ pähkliga. Mängijad teevad kordamööda käike: igal oma käigul valib mängija ühe kuhja ja jaotab selle kaheks mittetühjaks hulgaks (need hulgad ei pea olema tingimata kuhjad, s.t. nad võivad sisaldada suvalise arvu pähkleid). Mängija, kes ei saa käiku teha, kaotab. Milliste n väärtuste korral on alustajal võitev strateegia?

15. Ring on jaotatud 13 sektoriks, mis on järjest nummerdatud arvudega 1 kuni 13. Viis kirpu A, B, C, D ja E asuvad vastavalt sektorites 1, 2, 3, 4 ja 5. Kirbul on lubatud hüpata kummaski suunas viie sektori kaugusel asuvasse tühja sektorisse. Korraga võib hüpata vaid üks kirp ning kaks kirpu ei või samaaegselt olla ühes sektoris. Teatud arvu käikude järel on kirbud tagasi sektorites 1, 2, 3, 4, 5, kuid mitte tingimata selles järjestuses, milles nad alustasid. Millises järjestuses võivad kirbud nendes sektorites paikneda?

16. Ringjoone välispiirkonnas asuvast punktist P on sellele ringjoonele tõmmatud lõikaja ja puutuja. Lõikaja lõikab ringjoont punktides A ja B ning puutuja puutub ringjoont punktis C, mis asub punkti P ja ringjoone keskpunkti läbivast sirgest samal pool kui punktid A ja B. Punkti C projektsioon sellele sirgele on Q. Tõesta, et QC on nurga AQB poolitaja.

17. Ristkülikus küljepikkustega 3 ja 4 on igal küljel valitud suvaline sisepunkt. Olgu x, y, z ja u nende punktide poolt moodustatud nelinurga külgede pikkused. Tõesta, et $25 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \leqslant 50$.

18. Kolmnurga ABC tipust A tõmmatud kiir lõikab külge BC punktis X ja kolmnurga ABC ümberringjoont punktis Y. Tõesta, et

$$\frac{1}{|AX|} + \frac{1}{|XY|} \geqslant \frac{4}{|BC|}\,.$$

19. Olgu D külje BC keskpunkt kolmnurgas ABC. Olgu M selline punkt küljel BC, et $\angle BAM = \angle DAC$. Kolmnurga CAM ümberringjoon ja külg AB lõikuvad teistkordselt punktis L ning kolmnurga BAM ümberringjoon ja külg AC lõikuvad teistkordselt punktis K. Tõesta, et sirged KL ja BC on paralleelsed.

20. Kolm ringjoone kaart w_1, w_2, w_3 ühiste otspunktidega A ja B asuvad sirgest AB samal pool, kusjuures kaar w_2 asub kaarte w_1 ja w_3 vahel. Punktist B tõmmatud kaks kiirt lõikavad neid kaari vastavalt punktides M_1, M_2, M_3 ja K_1, K_2, K_3. Tõesta, et

$$\frac{|M_1M_2|}{|M_2M_3|} = \frac{|K_1K_2|}{|K_2K_3|}\,.$$