Baltic Way 2003, lagtävling i matematik

Riga, 2 November 2003

Skrivtid: 4,5 timmar.
Frågor kan ställas under de första 30 minuterna.

1. Låt $\mathbb{Q}_+$ vara mängden av positiva rationella tal. Bestäm alla funktioner $f : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}_+$ som uppfyller
   $(1) : f(\frac{1}{x}) = f(x)$
   $(2) : (1 + \frac{1}{x})f(x) = f(x+1)$
   för alla $x \in \mathbb{Q}_+$.

2. Visa att varje reell lösning till ekvationen
   $$x^3 + px + q = 0$$
   uppfyller olikheten $4qx \le p^2$.

3. Låt x, y och z vara positiva reella tal sådana att $xyz = 1$. Visa att
   $$(1+x)(1+y)(1+z) \ge 2\left(1 + \sqrt[3]{\frac{y}{x}} + \sqrt[3]{\frac{z}{y}} + \sqrt[3]{\frac{x}{z}}\right).$$

4. Låt a, b, c vara positiva reella tal. Visa att
   $$\frac{2a}{a^2+bc} + \frac{2b}{b^2+ca} + \frac{2c}{c^2+ab} \le \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}.$$

5. En talföljd (a_n) definieras på följande sätt: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = 2$ och $a_{n+1} = a_n a_{n-1}^2$ för $n \ge 2$. Visa att för varje $n \ge 1$ gäller olikheten
   $$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) < (2+\sqrt{2})a_1 a_2 \dots a_n.$$

6. Låt $n \ge 2$ och $d \ge 1$ vara heltal med $d|n$, och låt $x_1, x_2, \dots, x_n$ vara reella tal sådana att $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$. Visa att det finns minst $\binom{n-1}{d-1}$ val av d index $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_d \le n$ sådana att $x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_d} \ge 0$.

7. Låt X vara en delmängd av $\{1, 2, 3, \dots, 10000\}$ med följande egenskap: om a, $b \in X$ och $a \ne b$, så gäller att $a \cdot b \notin X$. Vilket är det största möjliga antalet element i X?

8. På ett bord ligger 2003 godisbitar. Två spelare turas om att göra drag enligt följande regler. I varje drag får man äta antingen en godisbit eller hälften av godisbitarna på bordet. (Om antalet godisbitar är udda får man äta den ”mindre halvan”.) Minst en godisbit måste ätas i varje drag. Den spelare som äter den sista biten förlorar. Vilken spelare – den som gör det första draget eller den andra – har en vinnande strategi?

9. Det är känt att n är ett positivt heltal och att $n \leq 144$. Man tillåts ställa tio frågor av formen "Är n mindre än a?". Svaren erhålls efter en viss fördröjning: svaret till fråga nummer i ges efter att fråga nummer $(i+1)$ har ställts, för $i = 1, 2, \ldots, 9$. Svaret till den tionde frågan ges direkt när den har ställts. Hitta en strategi för att bestämma n.

10. En *gitterpunkt* i planet är en punkt vars båda koordinater är heltal. *Centroiden* av fyra punkter (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3, 4$, definieras som punkten $\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)$. Låt n vara det största heltalet med följande egenskap: det finns n distinkta gitterpunkter i planet sådana att centroiden av vilka fyra som helst av dem aldrig är en gitterpunkt . Visa att $n = 12$.

11. Är det möjligt att välja 1000 punkter i ett plan så att minst 6000 av avstånden mellan par av dem är lika?

12. Låt $ABCD$ vara en kvadrat. Låt M vara en inre punkt på sidan BC och N en inre punkt på sidan CD med $\angle MAN = 45°$. Visa att den omskrivna cirkeln till triangeln AMN har sin medelpunkt på AC.

13. Låt $ABCD$ vara en rektangel med $BC = 2 \cdot AB$. Låt E vara mittpunkten av BC och P en godtycklig inre punkt på AD. Låt F och G vara de vinkelräta projektionerna av A på linjen BP respektive D på linjen CP. Visa att punkterna E, F, P, G ligger på en cirkel.

14. Låt ABC vara en godtycklig triangel, och låt AMB, BNC, CKA vara liksidiga trianglar på utsidan av ABC. Dra en linje genom mittpunkten av MN som är vinkelrät mot AC; och på liknande sätt linjer genom mittpunkterna av NK och KM som är vinkelräta mot AB respektive BC. Visa att dessa tre dragna linjer skär varandra i en punkt.

15. Låt P vara skärningspunkten mellan diagonalerna AC and BD i en cyclisk fyrhöring. En cirkel genom P tangerar sidan CD i sidans mittpunkt M, och skär sträckorna BD och AC i punkterna Q respektive R. Låt S vara en punkt på sträckan BD sådan att $BS = DQ$. Linjen genom S som är parallell med AB, skär AC i T. Visa att $AT = RC$.

16. Bestäm alla par av positiva heltal (a, b) sådana att $a - b$ är ett primtal och ab är en heltalskvadrat.

17. Alla positiva delare till ett heltal n skrivs i växande ordning i en lista. Maria ska konstruera en algoritm som för ett godtyckligt $d > 1$ i denna lista avgör om d är ett primtal. Anta att n har k delare som inte är större än d. Maria påstår att det räcker att kontrollera delbarheten av d med de första $\lceil k/2 \rceil$ talen i listan: om d har en delare större än 1 bland dessa tal så är d sammansatt, annars är d ett primtal. Har Maria rätt? ($\lceil x \rceil$ betecknar det minsta heltalet som är större än eller lika med x.)

18. Varje heltal målas med exakt en av färgerna BLÅ, GRÖN, RÖD, GUL. Kan detta göras på ett sådant sätt att om heltalen a, b, c, d har samma färg och inte alla är 0, så är $3a - 2b \neq 2c - 3d$?

19. Låt a och b vara positiva heltal. Visa att om $a^3 + b^3$ är kvadraten av ett heltal så är $a + b$ inte produkten av två olika primtal.

20. Låt n vara ett positivt heltal sådant att summan av alla positiva delare till n (utom n) plus antalet sådana delare är lika med n. Visa att $n = 2m^2$ för något heltal m.