Baltic Way 2003 mathematical team contest

Riga, November 2, 2003

Длительность олимпиады 4,5 часов
Вопросы принимаются в письменном виде первые 30 минут.

1. Обозначим через $\mathbb{Q}_+$ множество всех положительных рациональных чисел. Найдите все функции $f\colon \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}_+$ такие, что при всех $x \in \mathbb{Q}_+$ выполняются условия
(1): $f(1/x) = f(x)$
(2): $(1+1/x)f(x) = f(x+1)$.

2. Докажите, что для любого вещественного корня уравнения
$$x^3 + px + q = 0$$
выполняется неравенство $4qx \leqslant p^2$.

3. Пусть x, y, z —положительные вещественные числа, причем $xyz = 1$. Докажите, что
$$(1+x)(1+y)(1+z) \geqslant 2\left(1 + \sqrt[3]{y/x} + \sqrt[3]{z/y} + \sqrt[3]{x/z}\right).$$

4. Пусть a, b, c — положительные вещественные числа. Докажите, что
$$\frac{2a}{a^2+bc} + \frac{2b}{b^2+ac} + \frac{2c}{c^2+ab} \leqslant \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}.$$

5. Последовательность (a_n) определяется равенствами: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = 2$, $a_{n+1} = a_n a_{n-1}^2$ при $n \geqslant 2$. Докажите, что при $n \geqslant 1$
$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) < (2+\sqrt{2})a_1 a_2 \ldots a_n.$$

6. Пусть $n \geqslant 2$ — натуральное число, d — его натуральный делитель и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — вещественные числа такие, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$. Докажите, что можно по крайней мере C_{n-1}^{d-1} способами выбрать d индексов $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_d \leqslant n$ таких, что $x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_d} \geqslant 0$.

7. Пусть X — некоторое подмножество множества $\{1, 2, 3, \ldots, 10000\}$. Известно, что при любых $a, b \in X$, $a \neq b$, число $a \cdot b \notin X$. Какое наибольшее количество элементов может быть в множестве X ?

8. Есть 2003 конфетки. Двое игроков по очереди делают ходы. За один ход можно съесть 1 конфетку или половину всех лежащих на столе конфеток ("меньшую половину", если число конфеток на столе нечетно); за ход необходимо съесть как минимум одну конфетку. Съевший последнюю конфетку проигрывает. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию ?

9. Некто загадал натуральное число $n \leqslant 144$. Разрешается задать ему 10 вопросов вида "верно ли, что $n < a$?". Загадавший дает ответы с задержкой: ответ на i-й вопрос следует лишь после задания $i+1$-го вопроса ($i = 1, 2, \ldots, 9$). Ответ на 10-й вопрос дается сразу после его задания. Приведите алгоритм отгадывания числа n.

10. *Целой точкой* на плоскости называется точка, обе координаты которой целые. Точку $(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4})$ назовем *центроидом* четырех точек (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3, 4$. Пусть n — наибольшее натуральное число, для которого найдутся n различных целых точек на плоскости таких, что центроид никаких четырех из них не является целой точкой. Докажите, что $n = 12$.

11. Существуют ли 1000 точек на плоскости такие, что по крайней мере 6000 попарных расстояний между ними равны ?

12. Дан квадрат $ABCD$. M — внутренняя точка отрезка BC, N — внутренняя точка отрезка CD. Известно, что $\angle MAN = 45^\circ$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника AMN лежит на прямой AC.

13. Дан прямоугольник $ABCD$, в котором $BC = 2 \cdot AB$. Пусть E — середина BC, P — произвольная точка внутри отрезка AD. F и G — основания перпендикуляров, опущенных соответственно из A на BP и из D на CP. Докажите, что точки E, F, P и G лежат на одной окружности.

14. На сторонах произвольного треугольника ABC во внешнюю сторону построены правильные треугольники AMB, BNC и CKA. Через середину отрезка MN проведена прямая, перпендикулярная отрезку AC; через середину отрезка NK проведена прямая, перпендикулярная отрезку AB; через середину отрезка KM проведена прямая, перпендикулярная отрезку BC. Докажите, что эти три перпендикуляра пересекаются в одной точке.

15. P — точка пересечения диагоналей AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$. Окружность, проходящая через точку P, касается стороны CD в ее середине M и пересекает отрезки BD и AC в точках Q и R соответственно. Пусть S — точка отрезка BD, для которой $BS = DQ$. Прямая, параллельная AB и проходящая через S, пересекает AC в точке T. Докажите, что $AT = RC$.

16. Опишите все пары натуральных чисел (a, b) такие, что $a - b$ — простое число и ab — точный квадрат.

17. Все натуральные делители натурального числа n выписаны в строчку в порядке возрастания. Мэри хочет написать программу, которая по одному произвольно выбранному числу $d > 1$ из этой строчки определяет, простое оно или составное. Пусть в строчке ровно k чисел, не превосходящих d. Мэри утверждает, что достаточно проверить делимость числа d на первые $\lceil k/2 \rceil$ чисел в строчке: если среди них найдется делитель числа d, больший 1, то d — составное; в противном случае d — простое. Права ли Мэри ?

18. Все целые числа красятся в голубой, заленый, красный и желтый цвета. Можно ли покрасить их таким образом, что для любых четырех целых чисел a, b, c, d, не равных одновременно нулю и имеющих одинаковый цвет, $3a - 2b \neq 2c - 3d$?

19. Пусть a и b — два натуральных числа. Докажите, что если $a^3 + b^3$ — точный квадрат, то $a + b$ не может являться произведением двух различных простых чисел.

20. Дано натуральное число n. Если к сумме всех его натуральных делителей, кроме него самого, прибавить количество этих делителей, получится само число n. Докажите, что n — удвоенный квадрат.