Norsk versjon

Baltic Way 2003, matematisk lagkonkurranse

Riga, 2. november 2003

Tillatt tid: 4,5 timer.
Spørsmål om oppgavesettet kan stilles den første halvtimen.

1. La $\mathbb{Q}_+$ være mengden av de positive rasjonale tall.
   Finn alle funksjoner $f : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}_+$ slik at vi for alle $x \in \mathbb{Q}_+$ har
   $(1) : f(\frac{1}{x}) = f(x)$
   $(2) : (1 + \frac{1}{x})f(x) = f(x+1)$

2. Bevis at enhver reell løsning av
   $$x^3 + px + q = 0$$
   tilfredsstiller ulikheten $4qx \leq p^2$.

3. La x, y og z være positive reelle tall slik at $xyz = 1$. Vis at
   $$(1+x)(1+y)(1+z) \geq 2\left(1 + \sqrt[3]{\frac{y}{x}} + \sqrt[3]{\frac{z}{y}} + \sqrt[3]{\frac{x}{z}}\right).$$

4. La a, b, c være positive reelle tall. Vis at
   $$\frac{2a}{a^2+bc} + \frac{2b}{b^2+ca} + \frac{2c}{c^2+ab} \leq \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}.$$

5. En tallfølge (a_n) er definert slik: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = 2$, og $a_{n+1} = a_n a_{n-1}^2$ for $n \geq 2$.
   Vis at for alle $n \geq 1$ gjelder
   $$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) < (2+\sqrt{2})a_1 a_2 \dots a_n.$$

6. La $n \geq 2$ og $d \geq 1$ være heltall slik at $d|n$. La $x_1, x_2, \dots, x_n$ være reelle tall slik at $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$. Vis at det finnes minst $\binom{n-1}{d-1}$ valg av d indekser $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_d \leq n$ slik at $x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_d} \geq 0$.

7. La X være en delmengde av $\{1, 2, 3, \dots, 10000\}$ med følgende egenskap:
   Hvis a, $b \in X$, $a \neq b$, så er $a \cdot b \notin X$. Hva er det største antallet elementer i X?

8. På et bord ligger det 2003 drops. To spillere utfører trekk annenhver gang. Et trekk består i å spise et drops eller halvparten av dropsene på bordet (den "mindre halvdel" hvis det er et odde antall drops); minst et drops må spises i hvert trekk. Den som spiser siste drops, taper. Hvilken spiller – den første eller den andre – har en vinnende strategi?

9. Vi vet at n er et positivt heltall ≤ 144. Ti spørsmål av typen "Er n mindre enn a?" er tillatt. Svarene gis med en forsinkelse: Svaret på spørsmål nummer i gis like etter at spørsmål nummer $(i+1)$ blir stilt, $i = 1, 2, \dots, 9$, men svaret på det tiende spørsmålet gis umiddelbart etter at det er stilt. Finn en strategi for å bestemme n.

10. Et *gitterpunkt* i planet er et punkt med heltallige koordinater. *Tyngdepunktet* til fire punkter (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3, 4$, er punktet $(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4})$. La n være det største naturlige tallet med følgende egenskap: Det finnes n ulike gitterpunkter i planet slik at ingen fire av disse har et gitterpunkt som tyngdepunkt. Vis at $n = 12$.

11. Er det mulig å velge 1000 punkter i planet slik at minst 6000 avstander mellom to av disse er like?

12. La $ABCD$ være et kvadrat. La M være et indre punkt på siden BC og N et indre punkt på siden CD slik at $\angle MAN = 45°$. Vis at sentrum i sirkelen som er omskrevet trekant AMN, ligger på AC.

13. La $ABCD$ være et rektangel med $BC = 2 \cdot AB$. La E være midtpunktet på BC og P et vilkårlig indre punkt på AD. La F og G være fotpunktene for høydene fra A på BP og fra D på CP henholdsvis. Vis at punktene E, F, P og G ligger på en sirkel.

14. La ABC være en vilkårlig trekant og la AMB, BNC og CKA være likesidete trekanter på utsiden av ABC. Gjennom midtpunktet på MN konstruerer vi normalen på AC; tilsvarende konstruerer vi normaler på AB og BC gjennom midtpunktene på NK og KM henholdsvis. Vis at disse tre normalene skjærer hverandre i ett punkt.

15. La P være skjæringspunktet mellom diagonalene AC og BD i en syklisk firkant. En sirkel gjennom P tangerer siden CD i midtpunktet M på denne siden og skjærer dessuten linjestykkene BD og AC i punktene Q og R henholdsvis. La S være det punktet på linjestykket BD som er slik at $BS = DQ$. Parallellen til AB gjennom S skjærer AC i T. Vis at $AT = RC$.

16. Finn alle par av positive heltall (a, b) slik at $a - b$ er et primtall og ab er et kvadrattall.

17. Alle de positive divisorene til et positivt heltall n lagres i en liste i stigende rekkefølge. Marit skal skrive et program som avgjør for en vilkårlig valgt divisor $d > 1$ om den er et primtall. La n ha k positive divisorer som ikke er større enn d. Marit hevder at det er tilstrekkelig å undersøke deleligheten av d med de første $\lceil k/2 \rceil$ divisorene i n:
Hvis en divisor i d større enn 1 blir funnet blant dem, er d et sammensatt tall, ellers er d et primtall. Har Marit rett?

    Merknad: $\lceil x \rceil$ betyr det minste heltallet større enn eller lik x.

18. Hvert heltall farges med nøyaktig én av fargene BLÅ, GRØNN, LILLA, RØD.
Kan dette gjøres på en slik måte at
hvis a, b, c, d har samme farge og ikke alle er 0, så er $3a - 2b \neq 2c - 3d$?

19. La a og b være positive heltall. Vis at hvis $a^3 + b^3$ er et kvadrattall, så kan ikke $a + b$ være produktet av to ulike primtall.

20. La n være et positivt heltall slik at summen av alle positive divisorer i n (unntatt n) og antallet slike divisorer er lik n. Vis at $n = 2m^2$ for et eller annet heltall m.