Komandines matematikos varžybos “Baltijos kelias”

Ryga, 2003 11 02

Sprendimo laikas 4,5 valandos
Klausimus apie uždavinius galima pateikti per pirmasias 30 minučiu

1. Tegul Q^+ reiškia visu teigiamu racionaliuju skaičiu aibe. Raskite visas funkcijas $f: Q^+ \to Q^+$, tenkinančias salygas:

(1): $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$,

(2): $(1+\frac{1}{x})f(x) = f(x+1)$.

2. Irodykite, kad bet kuris realusis lygties $x^3 + px + q = 0$ sprendinys x tenkina salyga $4qx \le p^2$.

3. Tegul x, y ir z yra tokie teigiami realieji skaičiai, kad $xyz = 1$. Irodykite, kad $(1+x)(1+y)(1+z) \ge 2(1+\sqrt[3]{\frac{y}{x}}+\sqrt[3]{\frac{z}{y}}+\sqrt[3]{\frac{x}{z}})$.

4. Irodykite, kad su bet kuriais realiaisiais skaičiais a, b ir c yra teisinga nelygybe $\frac{2a}{a^2+bc}+\frac{2b}{b^2+ca}+\frac{2c}{c^2+ab} \le \frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}$.

5. Seka $\{a_n\}$ yra apibrežta taip: $a_1 = \sqrt{2}$; $a_2 = 2$, $a_{n+1} = a_n \cdot a_{n-1}^2$. Irodykite, kad visiems $n \ge 1$ yra teisinga nelygybe $(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n) < (2+\sqrt{2})a_1 a_2 ... a_n$.

6. Tegul $n \ge 2$ ir $d \ge 1$ yra tokie sveikieji skaičiai, kad n dalijasi iš d ir x_1, x_2, …, x_n yra tokie realieji skaičiai, kad $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$. Irodykite, kad yra mažiausiai C_{n-1}^{d-1} būdu parinkti indeksus $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_d \le n$, kad būtu $x_{i_1} + x_{i_2} + ... + x_{i_d} \ge 0$.

7. Kiek daugiausiai elementu galima paimti iš aibes $\{1,2,3,...,10000\}$ taip, kad būtu teisingatokia taisykle: jei paimti skaičiai a ir b ($a \ne b$), tai skaičius $a \cdot b$ nepaimtas?

8. Turime 1 000 saldainiu. Du žaidejai pakaitomis daro ejimus: vienu ejimu galima suvalgyti arba viena saldaini, arba puse ant stalo esančiu saldainiu (“mažesne puse” saldainiu, jeigu ju yra nelyginis skaičius). Kiekvienu ejimu turi būti suvalgytas bent vienas saldainis. Pralaimi žaidima tas, kuris suvalgo paskutini saldaini. Kuris žaidejas – pirmasis ar antrasis – turi laiminčiaja stratrgija?

9. Tegul x yra nežinomas teigiamas sveikasis skaičius, $x \le 144$. Galima užduoti dešimt pavidalo “ar $x \ge a$?” klausimu. Atsakymai yra duodami su velavimu: atsakymas I I-taji klausima yra pateikiamas tik tada, kai (i+1)-asis klausimas jau yra užduotas, $i = 1,2,...,9$. Atsakymas i 10-taji klausima yra pateikiamas iš karto, kai tik jis užduotas. Raskite strategija skaičiui x atspeti.

10. Gardeles tašku plokštumoje vadinkime toki taška, kurio abi koordinates yra sveikieji skaičiai. Keturiu tašku (x_i, y_i), kur $i = 1,2,3,4$, centroidas yra taškas $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}; \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}\right)$. Tegul n yra didžiausias natūralusis skaičius, pasižymintis tokia savybe: egzistuoja n tokiu skirtingu gardeles tašku, kad bet kuriu keturiu iš ju centroidas nera gardeles taškas. Irodykite, kad $n = 12$.
11. Ar imanoma parinkti 1 000 plokštumos tašku taip, kad mažiausiai 6 000 atstumu tarp dvieju iš ju būtu lygūs 1 m?
12. Keturkampis ABCD yra kvadratas. Sakykime, kad $\angle MAN = 45^0$, taškas M yra kraštineje BC, o taškas N yra kraštineje CD (M ir N nera keturkampio ABCD viršūnes). Irodykite, kad apie trikampi AMN apibrežto apskritimo centras yra istrižaineje AC.
13. Tegul ABCD yra toks stačiakampis, kad $BC = 2AB$. Tegul E yra kraštines BC vidurio taškas, o P – bet kuris (vidinis) kraštines AD taškas. Tegul F ir G yra atitinkamai statmenu, išvestu iš A i BD ir iš D i CP, pagrindai. Irodykite, kad taškai E, F, P ir G priklauso vienam apskritimui.
14. Tegul ABC yra bet koks trikampis, o AMB, BNC ir CKA yra taisyklingieji trikampiai, nubrežti trikampio ABC išoreje. Per atkarpos MN vidurio taška yra išvestas statmuo tiesei AC; panašiai per atkarpu NK ir KM vidurio taškus išvesti statmenys AB ir BC. Irodykite, kad tie 3 statmenys susikerta viename taške.
15. Tegul P yra i apskritima ibrežto keturkampio ABCD istrižainiu AC ir BD susikirtimo taškas. Apskritimas, einantis per taška P, liečia kraštine CD jos vidurio taške M ir kerta BD ir AC atitinkamai taškuose Q ir R. Tegul S yra toks atkarpos BD taškas, kad BS=DQ. Tiese, išvesta per taška C ir lygiagreti tiesei AB, kerta AC taške T. Irodykite, kad AT=BC.
16. Raskite visas tokias teigiamu sveikuju skaičiu (a,b) poras, kad $a - b$ būtu pirminis skaičius, o ab būtu tikslusis kvadratas.
17. Visi natūraliojo skaičiaus n dalikliai yra išrašyti didejančia tvarka. Maryte turi parašyti programa, kuri nustatytu, ar laisvai pasirinktas daliklis yra pirminis skaičius. Ji tvirtina, kad bet kuriam d>1 pakanka patikrinti daluma iš d pirmajai pusei visu n dalikliu, kurie yra ne didesni negu d: jeigu tarp ju atsiranda skaičiaus d daliklis, didesnis už 1, tai d yra sudetinis skaičius, o priešingu atveju d yra pirminis skaičius. Ar Maryte teisi?
18. Kiekvienas sveikasis skaičius yra nuspalvinamas viena iš keturiu spalvu – melynai, žaliai, raudonai arba geltonai. Ar imanoma tai atlikti taip, kad bet kuriems sveikiesiems skaičiams a, b, c ir d, tenkinantiems lygybe $3a - 2b = 2c - 3d$, būtu teisingas toks teiginys:
jeigu a, b, c ir d ne visi lygūs 0, tai du iš skaičiu a, b, c ir d yra nuspalvinti skirtingomis spalvomis.
19. Tegul a ir b yra du teigiami sveikieji skaičiai. Irodykite, kad jeigu $a^3 + b^3$ yra sveikojo skaičiaus kvadratas, tai $a + b$ nera lygus dvieju skirtingu pirminiu skaičiu sandaugai.
20. Visu natūraliojo skaičiaus n dalikliu (iškyrus n) suma plius tu dalikliu skaičius yra lygi n. Irodykite, kad tada su tam tikru sveikuoju m bus $n = 2m^2$.