Icelandic version

Eystrasaltskeppnin 2003

Riga, 2. nóvember 2003

Tímalengd: 4.5 klukkustundir.
Spyrja má um dæmin fyrstu 30 mínúturnar.

1. Látum $\mathbb{Q}_+$ vera mengi jákvæðra ræðra talna.
   Finnið öll föll $f : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}_+$ þannig að um öll $x \in \mathbb{Q}_+$ gildi
   $(1) : f(\frac{1}{x}) = f(x)$
   $(2) : (1 + \frac{1}{x})f(x) = f(x+1)$

2. Sannið að sérhver rauntalnalausn

   $$x^3 + px + q = 0$$

   uppfyllir ójöfnuna $4qx \leq p^2$.

3. Látum x, y og z vera jákvæðar rauntölur þannig að $xyz = 1$. Sannið að

   $$(1+x)(1+y)(1+z) \geq 2\left(1 + \sqrt[3]{\frac{y}{x}} + \sqrt[3]{\frac{z}{y}} + \sqrt[3]{\frac{x}{z}}\right).$$

4. Látum a, b, c vera jákvæðar rauntölur. Sannið að

   $$\frac{2a}{a^2+bc} + \frac{2b}{b^2+ca} + \frac{2c}{c^2+ab} \leq \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}.$$

5. Runa (a_n) er skilgreind þannig: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = 2$, og $a_{n+1} = a_n a_{n-1}^2$ fyrir $n \geq 2$. Sannið að fyrir sérhvert $n \geq 1$ gildir

   $$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) < (2+\sqrt{2})a_1 a_2 \ldots a_n.$$

6. Látum $n \geq 2$ og $d \geq 1$ vera heiltölur þannig að $d \mid n$, og látum $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vera rauntölur þannig að $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$. Sannið að til séu minnst $\binom{n-1}{d-1}$ ólíkar leiðir til að velja d tölur, $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_d \leq n$, þannig að $x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_d} \geq 0$.

7. Látum X vera hlutmengi í $\{1, 2, 3, \ldots, 10000\}$ sem uppfyllir eftirfarandi skilyrði: Ef $a, b \in X$, $a \neq b$, þá er $a \cdot b \notin X$. Hver er mesti fjöldi staka í X?

8. Á borði liggja 2003 sælgætismolar. Tveir leikmenn leika til skiptis. Í hverjum leik þarf annaðhvort að borða einn mola eða helming molanna á borðinu ("minni helminginn" ef fjöldi mola er oddatala), en þó minnst einn mola. Sá tapar sem borðar síðasta molann. Hvor leikmaðurinn – sá fyrri eða sá seinni – á vinningsleið?

9. Gefið er að n sé jákvæð heiltala, $n \leq 144$. Tíu spurningar af gerðinni "Er n minni en a?" eru leyfðar. Svörin eru ekki gefin strax: Spurningu i er ekki svarað fyrr en spurning $(i+1)$ hefur verið borin fram, $i = 1, 2, \ldots, 9$. Svarið við 10. spurningunni fæst um leið og hún hefur verið borin fram. Finnið leið til að ákvarða n.

10. *Grindarpunktur* í sléttunni er punktur með heiltöluhnit. *Þungamiðja* fjögurra punkta (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3, 4$, er punkturinn $(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4})$. Látum n vera stærstu náttúrulegu töluna sem hefur eftirfarandi eiginleika: Til eru n ólíkir grindarpunktar í sléttunni þannig að þungamiðja sérhverra fjögurra þeirra er ekki grindarpunktur. Sannið að $n = 12$.

11. Er mögulegt að velja 1000 punkta í sléttunni þannig að a.m.k. 6000 fjarlægðir á milli þeirra séu jafnar?

12. Látum $ABCD$ vera ferning. Látum M vera innri punkt á hliðinni BC og N vera innri punkt á hliðinni CD með $\angle MAN = 45°$. Sannið að miðja umritaðs hrings AMN liggi á AC.

13. Látum $ABCD$ vera rétthyrning með $BC = 2 \cdot AB$. Látum E vera miðpunkt BC og P vera einhvern innri punkt á AD. Látum F og G vera fótpunkta A á BP og D á CP í þessari röð. Sannið að punktarnir E, F, P, G liggi á hring.

14. Látum ABC vera þríhyrning og AMB, BNC, CKA vera jafnhliða þríhyrninga sem liggja utan á ABC. Teiknum þveril á AC í gegnum miðpunkt MN, þveril á AB í gegnum miðpunkt NK og þveril á BC í gegnum miðpunkt KM. Sannið að þessir þrír þverlar skerist í einum punkti.

15. Látum P vera skurðpunkt hornalínanna AC og BD í rásuðum ferhyrningi. Hringur gegnum P snertir hliðina CD í miðpunkti hennar M og sker strikin BD og AC í punktunum Q og R, í þessari röð. Látum S vera punkt á strikinu BD þannig að $BS = DQ$. Línan samsíða AB gegnum S sker AC í T. Sannið að $AT = RC$.

16. Finnið öll pör jákvæðra heiltalna (a, b) þannig að $a - b$ sé frumtala og ab sé ferningstala.

17. Allir jákvæðir deilar jákvæðrar heiltölu n er raðað í vaxandi röð. Mary þarf að skrifa forrit sem segir fyrir um hvort gefinn deilir $d > 1$ sé frumtala. Látum n hafa k deila, ekki stærri en d. Mary heldur því fram að nægjanlegt sé að athuga hvort d sé deilanlegt með fyrstu $\lceil k/2 \rceil$ deilum n: Ef á meðal þeirra er deilir tölunnar d, stærri en 1, þá er d samsett tala, en annars er d frumtala. Hefur Mary á réttu að standa?

    ($\lceil x \rceil$ er minnsta heila talan sem er stærri en eða jöfn x).

18. Sérhver heiltala er lituð með nákvæmlega einum litanna BLÁR, GRÆNN, RAUÐUR, GULUR. Er hægt að gera þetta þannig að, ef tölurnar a, b, c, d eru ekki allar 0 og hafa sama lit, þá sé $3a - 2b \neq 2c - 3d$?

19. Látum a og b vera jákvæðar heiltölur. Sannið að ef $a^3 + b^3$ er ferningstala, þá sé $a + b$ ekki margfeldi tveggja ólíkra frumtalna.

20. Látum n vera jákvæða heiltölu þannig að summa allra deila hennar (nema n) plús fjöldi þessara deila sé jafnt n. Sannið að $n = 2m^2$ fyrir einhverja heiltölu m.