Matemaatikaolümpiaad “Balti tee 2003”

Riias, 2. novembril 2003

1. Olgu $\mathbb{Q}_+$ positiivsete ratsionaalarvude hulk. Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}_+$, mis iga $x \in \mathbb{Q}_+$ korral rahuldavad tingimusi

   (1) $f\Big(\dfrac{1}{x}\Big) = f(x)$,

   (2) $\Big(1 + \dfrac{1}{x}\Big) f(x) = f(x+1)$.

2. Tõesta, et võrrandi

   $$x^3 + px + q = 0$$

   iga reaalarvuline lahend rahuldab võrratust $4qx \leqslant p^2$.

3. Olgu x, y ja z niisugused positiivsed reaalarvud, et $xyz = 1$. Tõesta, et

   $$(1+x)(1+y)(1+z) \geqslant 2\Big(1 + \sqrt[3]{\frac{y}{x}} + \sqrt[3]{\frac{z}{y}} + \sqrt[3]{\frac{x}{z}}\Big) .$$

4. Olgu a, b ja c positiivsed reaalarvud. Tõesta, et

   $$\frac{2a}{a^2+bc} + \frac{2b}{b^2+ca} + \frac{2c}{c^2+ab} \leqslant \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} .$$

5. Jada (a_n) defineeritakse järgmiselt: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = 2$, $a_{n+1} = a_n a_{n-1}^2$, $n \geqslant 2$. Tõesta, et iga $n \geqslant 1$ korral

   $$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) < (2+\sqrt{2})a_1 a_2 \ldots a_n .$$

6. Olgu $n \geqslant 2$ ja $d \geqslant 1$ täisarvud, kusjuures $d \,|\, n$, ja olgu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reaalarvud, mille korral $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$. Tõesta, et on vähemalt $\binom{n-1}{d-1}$ võimalust valida d indeksit $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_d \leqslant n$ nii, et $x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_d} \geqslant 0$.

7. Olgu X hulga $\{1, 2, 3, \ldots, 10000\}$ alamhulk, millel on järgmine omadus: kui $a, b \in X$, $a \neq b$, siis $a \cdot b \notin X$. Leia hulga X elementide suurim võimalik arv.

8. Laual on 2003 kommi. Kaks mängijat käivad kordamööda. Igal käigul võib ära süüa ühe kommi või pooled lauale jäänud kommidest (kui laual on paaritu arv komme, siis “väiksema poole”); igal käigul peab sööma vähemalt ühe kommi. Kaotab mängija, kes sööb viimase kommi. Kummal mängijal – alustajal või teisena käijal – on võitev strateegia?

9. Olgu n tundmatu positiivne täisarv, $n \leqslant 144$. On lubatud esitada kümme küsimust vormis “Kas n on väiksem kui a?”. Vastused antakse viivitusega: i. küsimusele vastatakse pärast seda, kui $(i+1)$. küsimus on esitatud, $i = 1, 2, \ldots, 9$. Kümnendale küsimusele vastatakse kohe pärast selle esitamist. Leia strateegia arvu n kindlakstegemiseks.

10. *Võrepunkt* on tasandi punkt, mille mõlemad koordinaadid on täisarvud. Nelja punkti (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3, 4$, *kese* on punkt $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}\right)$. Olgu n suurim naturaalarv, millel on järgmine omadus: tasandil leidub n võrepunkti, nii et neist ühegi nelja punkti kese ei ole võrepunkt. Tõesta, et $n = 12$.

11. Kas tasandil on võimalik valida 1000 punkti, nii et vähemalt 6000 kaugust nende vahel on võrdsed?

12. Olgu antud ruut $ABCD$. Külgedel BC ja CD valitakse vastavalt sisepunktid M ja N, nii et $\angle MAN = 45°$. Tõesta, et kolmnurga AMN ümberringjoone keskpunkt asub sirgel AC.

13. Olgu $ABCD$ ristkülik, milles $|BC| = 2 \cdot |AB|$. Olgu E külje BC keskpunkt ja P külje AD suvaline sisepunkt. Olgu F punktist A lõigule BP tõmmatud ristlõigu aluspunkt ja G punktist D lõigule CP tõmmatud ristlõigu aluspunkt. Tõesta, et punktid E, F, P ja G asuvad ühel ringjoonel.

14. Olgu ABC suvaline kolmnurk, mille külgedele on kolmnurgast väljapoole konstrueeritud võrdkülgsed kolmnurgad AMB, BNC, CKA. Lõigu MN keskpunktist tõmmatakse ristsirge küljele AC; analoogiliselt tõmmatakse ristsirged lõikude NK ja KM keskpunktidest vastavalt külgedele AB ja BC. Tõesta, et need kolm ristsirget lõikuvad ühes punktis.

15. Olgu P kõõlnelinurga $ABCD$ diagonaalide AC ja BD lõikepunkt. Punkti P läbiv ringjoon puutub külge CD selle keskpunktis M ning lõikab diagonaale BD ja AC vastavalt punktides Q ja R. Olgu S niisugune punkt lõigul BD, et $|BS| = |DQ|$. Läbi punkti S küljega AB paralleelselt tõmmatud sirge lõikab diagonaali AC punktis T. Tõesta, et $|AT| = |RC|$.

16. Leia kõik positiivsete täisarvude paarid (a, b), nii et $a - b$ on algarv ja ab on täisruut.

17. Positiivse täisarvu n kõik positiivsed jagajad salvestatakse massiivi kasvavas järjekorras. Mari peab kirjutama programmi, mis otsustab suvaliselt valitud jagaja $d > 1$ jaoks, kas tegu on algarvuga. Olgu k arvu n niisuguste jagajate arv, mis pole suuremad kui d. Mari väidab, et piisab kontrollida d jaguvust arvu n esimese $\lceil k/2 \rceil$ jagajaga: kui d-l leidub nende seas ühest suurem jagaja, siis on d kordarv, vastasel korral algarv. Kas Maril on õigus?

18. Iga täisarv värvitakse kas siniseks, roheliseks, punaseks või kollaseks. Kas saab värvida nii, et kui sama värvi täisarvud a, b, c, d ei ole kõik võrdsed 0-ga, siis $3a - 2b \neq 2c - 3d$?

19. Olgu a ja b positiivsed täisarvud. Tõesta, et kui $a^3 + b^3$ on täisruut, siis $a + b$ ei ole kahe erineva algarvu korrutis.

20. Positiivse täisarvu n kõigi positiivsete jagajate (välja arvatud n) ja nende jagajate arvu summa võrdub n-ga. Tõesta, et $n = 2m^2$ mingi täisarvu m jaoks.