Baltic Way 2002 lagtävling i matematik

Swedish version

Tartu, 2 november 2002

Skrivtid: 4.5 timmar.
Frågor om problemen besvaras under de första 30 minuterna.

1. Bestäm alla reella lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} a^3+3ab^2+3ac^2-6abc = 1 \\ b^3+3ba^2+3bc^2-6abc = 1 \\ c^3+3ca^2+3cb^2-6abc = 1 \end{cases}.$$

2. Låt a, b, c, d vara reella tal sådana att

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= -2\,, \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd &= 0\,. \end{aligned}$$

   Visa att minst ett av talen a, b, c, d är mindre än eller lika med -1.

3. Bestäm alla följder $a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$ av reella tal sådana att

$$a_{m^2+n^2} = a_m^2 + a_n^2$$

   för alla heltal $m, n \geqslant 0$.

4. Låt n vara ett positivt heltal. Visa att

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(1-x_i)^2 \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^2$$

   för alla icke-negativa reella tal $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sådana att $x_1+x_2+\cdots+x_n = 1$.

5. Bestäm alla par $(a,\, b)$ av positiva rationella tal sådana att

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} = \sqrt{2+\sqrt{3}}\,.$$

6. Ett rektangulärt spelbräde av storlek $m \times n$, $m, n \geqslant 2$, är indelat i rutor med sidlängd 1. Ett torn placeras på någon ruta. I varje drag kan tornet flyttas ett godtyckligt antal rutor vågrätt eller lodrätt, med det extra villkoret att varje drag måste göras i en riktning roterad 90° medurs i förhållande till föregående drag. (Till exempel måste ett drag till vänster följas av ett drag uppåt, sedan ett till höger, och så vidare.) För vilka värden av m och n är det möjligt att tornet besöker varje ruta exakt en gång och återvänder till den ruta där det började? (I ett drag anses tornet besöka endast den ruta där det stannar, och inte de rutor som passeras.)

7. Man ritar n konvexa fyrhörningar i planet. De delar planet i ett antal områden (av vilka ett är oändligt). Bestäm det största möjliga antalet sådana områden.

8. Låt P vara en mängd av $n \geqslant 3$ punkter i planet, av vilka inga tre ligger i en linje. På hur många sätt kan man välja en mängd T av $\binom{n-1}{2}$ trianglar med hörn i P, sådana att varje triangel i T har minst en sida som inte är en sida i någon annan triangel i T?

9. Två magiker utför följande trick. Den förste magikern lämnar rummet. Den andre magikern tar en kortlek med 100 kort numrerade med talen $1, 2, \ldots, 100$ och ber tre åskådare i tur och ordning ta varsitt kort. Den andre magikern tittar på korten och väljer själv ett kort från resten av kortleken. Åskådarna blandar dessa fyra kort, hämtar den förste magikern och ger honom de fyra korten. Den förste magikern tittar på korten, och ”gissar” vilket kort den förste, andre respektive tredje åskådaren valde. Visa att det är möjligt för magikerna att utföra detta trick.

10. Låt N vara ett positivt heltal. Två personer spelar följande spel. Den förste spelaren skriver en lista av positiva heltal, inte större än 25, och inte nödvändigtvis olika, sådana att deras summa är minst 200. Den andre spelaren vinner om han kan välja några av dessa tal så att deras summa S uppfyller villkoret att $200 - N \leqslant S \leqslant 200 + N$. Vilket är det minsta värdet på N för vilket den andre spelaren har en vinnande strategi?

11. Låt n vara ett positivt heltal. Betrakta n punkter i planet sådana att inga tre av dem ligger i en linje, och inga två av avstånden mellan dem är lika. En efter en av punkterna förbinds till de två närmast liggande punkterna med sträckor. (Om det redan finns sträckor dragna till punkten i fråga, lämnas dessa kvar.) Visa att det inte finns någon punkt, från vilken sträckor utgår till mer än 11 andra punkter.

12. En mängd S av fyra olika punkter i planet är given. Man vet att för varje punkt $X \in S$ kan de övriga tre punkterna ges beteckningar Y, Z och W så att

$$|XY| = |XZ| + |XW|.$$

Visa att alla fyra punkterna ligger på en linje.

13. Låt ABC vara en spetsvinklig triangel med $\angle BAC > \angle BCA$, och låt D vara en punkt på sidan AC sådan att $|AB| = |BD|$. Låt vidare F vara en punkt på den omskrivna cirkeln till triangeln ABC sådan att linjen FD är vinkelrät mot sidan BC och punkterna F, B ligger på olika sidor av linjen AC. Visa att linjen FB är vinkelrät mot sidan AC.

14. Låt L, M och N vara punkter på sidorna AC, AB respektive BC i triangeln ABC sådana att BL är bisektris till vinkeln $\angle ABC$ och sträckorna AN, BL och CM skär varandra i en punkt. Visa att om $\angle ALB = \angle MNB$ så är $\angle LNM = 90^\circ$.

15. En spindel och en fluga sitter på en kub. Flugan vill maximera den kortaste vägen till spindeln längs kubens yta. Är det nödvändigtvis bäst för flugan att vara vid punkten mittemot spindeln? (Med mittemot menar vi symmetriskt placerad med avseende på kubens medelpunkt.)

16. Bestäm alla icke-negativa heltal m sådana att

$$a_m = \left(2^{2m+1}\right)^2 + 1$$

är delbart med högst två olika primtal.

17. Visa att talföljden

$$\binom{2002}{2002}, \binom{2003}{2002}, \binom{2004}{2002}, \dots,$$

betraktad modulo 2002, är periodisk.

18. Bestäm alla heltal $n > 1$ sådana att varje primtalsdelare till $n^6 - 1$ är en delare till $(n^3 - 1)(n^2 - 1)$.

19. Låt n vara ett positivt heltal. Visa att ekvationen

$$x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3n$$

saknar positiva rationella lösningar.

20. Finns det någon oändlig icke-konstant aritmetisk talföljd, vars termer alla är av formen a^b, där a och b är positiva heltal med $b \geqslant 2$?