Russian version

Baltic Way 2002 mathematical team contest

Тарту, 2 ноября 2002

Длительность олимпиады 4.5 часов.
Вопросы принимаются в письменном виде первые 30 минут.

1. Решите в вещественных числах систему уравнений

$$\begin{cases} a^3+3ab^2+3ac^2-6abc = 1 \\ b^3+3ba^2+3bc^2-6abc = 1 \\ c^3+3ca^2+3cb^2-6abc = 1 \end{cases}.$$

2. Вещественные числа a, b, c, d таковы, что

$$a+b+c+d = -2 \quad \text{и}$$
$$ab+ac+ad+bc+bd+cd = 0\,.$$

Докажите, что хотя бы одно из чисел a, b, c, d не превосходит -1.

3. Найдите все такие последовательности вещественных чисел $a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$, что при любых целых $m, n \geqslant 0$

$$a_{m^2+n^2} = a_m^2 + a_n^2\,.$$

4. Пусть n натуральное число. Докажите, что при любых неотрицательных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, таких что $x_1+x_2+\cdots+x_n = 1$, выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(1-x_i)^2 \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^2.$$

5. Найдите все пары положительных рациональных чисел $(a,\, b)$, для которых

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} = \sqrt{2+\sqrt{3}}\,.$$

6. Дана шахматная доска $m \times n$, $m, n \geqslant 2$. “Кривая ладья” за один ход перемещается на любую клетку по вертикали или горизонтали и, остановившись на ней, поворачивает на 90° по часовой стрелке (например, после хода налево должен следовать ход наверх, после него — ход направо, затем — вниз и т. д.) При каких m и n можно поставить ладью на какую-нибудь клетку доски, посетить все клетки доски по одному разу и вернуться в конце в исходную клетку? Считается, что ладья посещает только те клетки, на которых останавливается, но не те, над которыми проходит.

7. На какое наибольшее количество частей могут разбить плоскость n выпуклых четырехугольников (неограниченная часть учитывается)?

8. Пусть P — множество из $n \geqslant 3$ точек плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколькими способами можно указать множество T, состоящее из C_{n-1}^2 треугольников с вершинами из P, такое что каждый из треугольников множества T имеет сторону, которая не является стороной ни одного из остальных треугольников множества T?

9. Два фокусника показывают следующий фокус. Первый фокусник выходит из комнаты. Второй фокусник берет колоду из 100 карт, пронумерованных числами $1, 2, \ldots, 100$, и просит трех зрителей взять по одной карте (второй фокусник видит, какую карту взял каждый из зрителей). После этого второй фокусник добавляет к этим трем одну карту из оставшейся части колоды. Зрители перемешивают эти четыре карты, зовут первого фокусника и отдают их ему. Первый фокусник изучает эти 4 карты и "угадывает", какую карту взял первый зритель, какую — второй и какую — третий. Докажите, что такой фокус действительно возможен.

10. Пусть N — натуральное число. Двое играют в следующую игру. Первый игрок выписывает набор натуральных (не обязательно различных) чисел, не превосходящих 25, сумма которых не меньше 200. Второй игрок выигрывает, если он сумеет выбрать несколько из них так, чтобы их сумма S удовлетворяла неравенству $200-N \leqslant S \leqslant 200+N$. При каком наименьшем значении N второй игрок заведомо сможет выиграть?

11. Дано натуральное число n. В плоскости рассматривается набор из n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой и все попарные расстояния между которыми попарно различны. Из каждой точки провели по отрезку к двум ближайшим к ней точкам. Докажите, что никакая точка не оказалась в результате соединена более чем с 11 точками.

12. На плоскости дано множество S, состоящее из четырех различных точек. Известно, что для любой точки $X \in S$ оставшеся точки можно обозначить через Y, Z и W в таком порядке, что

$$|XY| = |XZ| + |XW|.$$

Докажите, что все четыре точки лежат на одной прямой.

13. ABC — остроугольный треугольник, в котором $\angle BAC > \angle BCA$. Пусть D — такая точка на стороне AC, что $|AB| = |BD|$. Далее, пусть точка F на описанной окружности треугольника ABC такова, что прямая FD перпендикулярна стороне BC, причем точки F и B лежат по разные стороны от прямой AC. Докажите, что прямая FB перпендикулярна стороне AC.

14. На сторонах AC, AB и BC треугольника ABC лежат точки L, M и N соответственно. При этом BL — биссектриса угла ABC, а отрезки AN, BL и CM пересекаются в одной точке. Докажите, что если $\angle ALB = \angle MNB$, то $\angle LNM = 90^\circ$.

15. На поверхности куба сидит паук. Муха хочет сесть на поверхность куба так, чтобы кратчайшее расстояние вдоль поверхности куба между ней и пауком оказалось как можно больше. Верно ли, что при любом положении паука она должна сесть в противоположную ему точку куба?

16. Найдите все неотрицательные целые m, для которых число

$$a_m = \left(2^{2m+1}\right)^2 + 1$$

имеет не более двух различных простых делителей.

17. Докажите, что последовательность

$$C_{2002}^{2002}, C_{2003}^{2002}, C_{2004}^{2002}, \ldots,$$

чисто периодична по модулю 2002.

18. Найдите все натуральные $n > 1$, для которых все простые делители числа $n^6 - 1$ являются также делителями числа $(n^3-1)(n^2-1)$.

19. Пусть n — натуральное число. Докажите, что уравнение

$$x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3n$$

не имеет решений в положительных рациональных числах.

20. Существует ли непостоянная бесконечная арифметическая прогрессия, каждый член которой является степенью натурального числа (не ниже второй)?