Eystrasaltskeppnin í stærðfræði 2002

Icelandic version

Tartu, 2. nóvember, 2002

Próftími: $4\frac{1}{2}$ klukkustund.
Spurningum varðandi dæmin er svarað fyrstu 30 mínúturnar.

1. Leysið jöfnuhneppið

$$\begin{cases} a^3 + 3ab^2 + 3ac^2 - 6abc = 1 \\ b^3 + 3ba^2 + 3bc^2 - 6abc = 1 \\ c^3 + 3ca^2 + 3cb^2 - 6abc = 1 \end{cases}$$

   í mengi rauntalna.

2. Látum a, b, c, d vera rauntölur þannig að

$$a + b + c + d = -2\,,$$
$$ab + ac + ad + bc + bd + cd = 0\,.$$

   Sannið að í það minnsta ein talnanna a, b, c, d sé ekki stærri en -1.

3. Finnið allar runur $a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$ rauntalna þannig að

$$a_{m^2+n^2} = a_m^2 + a_n^2$$

   fyrir allar heiltölur $m, n \geqslant 0$.

4. Látum n vera jákvæða heiltölu. Sannið að

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(1 - x_i)^2 \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$$

   fyrir allar rauntölur $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sem ekki eru neikvæðar, þannig að $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$.

5. Finnið öll pör $(a,\, b)$ jákvæðra ræðra talna þannig að

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}\,.$$

6. Eftirfarandi leikur er leikinn á $m \times n$ reita rétthyrndu borði, $m, n \geqslant 2$, samansettu af einingaferningum. Fyrst er hrókur settur á einhvern reit. Í hverjum leik er hrókurinn færður lárétt eða lóðrétt um einhvern fjölda reita, en þó þannig að í hverjum leik er stefnunni breytt um 90° réttsælis frá næsta leik á undan (t.d. eftir leik til vinstri þarf næst að færa upp, síðan til hægri o.s.frv.). Fyrir hvaða gildi á m og n getur hrókurinn komist á alla reiti borðsins nákvæmlega einu sinni og endað á upphafsreit? (Hrókurinn telst aðeins hafa heimsótt þá reiti sem hann staðnæmist á, ekki þá sem hann stekkur yfir.)

7. Drögum n kúpta ferhyrninga í planinu. Þeir skipta planinu í svæði (eitt svæðið er óendanlegt). Ákvarðið mesta hugsanlega fjölda þessara svæða.

8. Látum P vera mengi $n \geqslant 3$ punkta í planinu þar sem engir þrír punktar liggja á sömu línu. Hve margir möguleikar eru á því að velja T, mengi $\binom{n-1}{2}$ þríhyrninga með hornpunkta í P, þannig að sérhver þríhyrningur í T hafi hlið sem ekki er hlið neins annars þríhyrnings í T?

9. Tveir töframenn framkvæma eftirfarandi töfrabragð. Fyrri töframaðurinn yfirgefur herbergið. Seinni töframaðurinn tekur stokk með 100 spilum sem númeruð eru $1, 2, \ldots, 100$ og fær þrjá áhorfendur, hvern á eftir öðrum, til að draga eitt spil. Seinni töframaðurinn sér hvað spil hver áhorfandi dró. Síðan bætir hann við einu spili úr stokknum. Áhorfendur stokka þessi fjögur spil, kalla á fyrri töframanninn og láta hann hafa þessi fjögur spil. Fyrri töframaðurinn lítur á spilin fjögur og "giskar" á hvaða spil fyrsti áhorfandinn valdi, hvaða spil annar áhorfandinn valdi og hvaða spil sá þriðji valdi. Sannið að töframennirnir geti framkvæmt þetta töfrabragð.

10. Látum N vera jákvæða heiltölu. Tveir einstaklingar leika eftirfarandi leik. Fyrri leikmaðurinn skrifar niður lista af jákvæðum heiltölum minni eða sama sem 25, ekki endilega ólíkum, þannig að summa þeirra sé að minnsta kosti 200. Seinni leikmaðurinn vinnur ef hann getur valið einhverjar þessara talna þannig að summa þeirra S uppfylli skilyrðið: $200 - N \leqslant S \leqslant 200 + N$. Hvert er minnsta gildi N þannig að seinni leikmaðurinn hafi örugga vinningsleið?

11. Látum n vera jákvæða heiltölu. Lítum á n punkta í planinu þannig að engir þrír liggja á sömu línu og engin fjarlægð á milli tveggja punkta er jöfn. Við tökum punktana einn af öðrum og tengjum hvern þeirra við þá tvo punkta sem eru næstir honum með striki (ef þegar er búið að draga strik að punktinum þá eru þau ekki þurrkuð út). Sannið að frá engum punkti eru strik dregin í fleiri en 11 punkta.

12. Mengi fjögurra ólíkra punkta S er gefið í planinu. Vitað er að fyrir sérhvern punkt $X \in S$ má tákna hina punktana með Y, Z og W þannig að

$$|XY| = |XZ| + |XW|.$$

Sannið að punktarnir fjórir liggja allir á sömu línu.

13. Látum ABC vera hvasshyrndan þríhyrning með $\angle BAC > \angle BCA$, og látum D vera punkt á hliðinni AC þannig að $|AB| = |BD|$. Ennfremur, látum F vera punkt á umrituðum hring þríhyrningsins ABC þannig að línan FD er hornrétt á hliðina BC og punktarnir F og B liggja hvor sínu megin við línuna AC. Sannið að línan FB er hornrétt á hliðina AC.

14. Látum L, M og N vera punkta á hliðunum AC, AB og BC í þríhyrningnum ABC, í þessari röð, þannig að BL sé helmingalína hornsins $\angle ABC$ og strikin AN, BL og CM eiga sameiginlegan punkt. Sannið að ef $\angle ALB = \angle MNB$ þá er $\angle LNM = 90^\circ$.

15. Könguló og fluga sitja á teningi. Flugan vill hámarka stystu leið til köngulóarinnar eftir yfirborði teningsins. Er best fyrir fluguna að vera andspænis köngulónni? ("Andspænis" þýðir samhverft um miðju teningsins).

16. Finnið allar heiltölur m, jákvæðar eða núll, þannig að

$$a_m = \left(2^{2m+1}\right)^2 + 1$$

sé deilanleg með í mesta lagi tveimur mismunandi frumtölum.

17. Sýnið að runan

$$\binom{2002}{2002}, \binom{2003}{2002}, \binom{2004}{2002}, \dots,$$

sé lotubundin, samleifa 2002.

18. Finnið allar heiltölur $n > 1$ þannig að sérhver frumtöludeilir $n^6 - 1$ gangi upp í $(n^3 - 1)(n^2 - 1)$.

19. Látum n vera jákvæða heiltölu. Sannið að jafnan

$$x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3n$$

hefur ekki lausnir sem eru jákvæðar, ræðar tölur.

20. Er til óendanleg jafnmunaruna ólíkra talna, þar sem rita má hvern lið sem a^b, með a og b jákvæðar heiltölur og $b \geqslant 2$?