Baltic Way 2002

Tartu, 2. November 2002

Arbeitszeit: 4,5 Stunden
Fragen zu den Aufgaben können während der ersten 30 Minuten gestellt werden.

1. Man löse das folgende Gleichungssystem im Bereich der reellen Zahlen.

$$\begin{aligned} a^3+3ab^2+3ac^2-6abc &= 1 \\ b^3+3ba^2+3bc^2-6abc &= 1 \\ c^3+3ca^2+3cb^2-6abc &= 1 \end{aligned}$$

2. Es seien a, b, c, d reelle Zahlen, die

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= -2\,, \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd &= 0 \end{aligned}$$

erfüllen. Zeigen Sie, dass mindestens eine der Zahlen a, b, c, d nicht größer als -1 ist.

3. Bestimmen Sie alle reellwertigen Folgen $a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$ mit

$$a_{m^2+n^2} = a_m^2 + a_n^2$$

für alle ganzen Zahlen $m, n \geqslant 0$.

4. Sei n eine positive ganze Zahl. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(1-x_i)^2 \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^2$$

gilt für alle nichtnegativen reellen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit $x_1+x_2+\cdots+x_n = 1$.

5. Bestimmen Sie alle Paare $(a,\, b)$ positiver rationaler Zahlen, die

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$$

erfüllen.

6. Auf einem rechteckigen $m\times n$-Spielfeld ($m, n \geqslant 2$) aus Einheitsquadraten wird folgendes Einpersonenspiel gespielt: Am Anfang wird ein Turm auf ein beliebiges Feld gestellt. Ein Zug besteht darin, dass der Turm eine beliebige Zahl von Feldern in vertikaler oder horizontaler Richtung gezogen wird; dabei muss die Zugrichtung im Uhrzeigersinn um 90°, bezogen auf den vorigen Zug, weitergedreht werden. (Also erfolgt z.B. nach einem Zug nach links der nächste nach oben, dann der nächste nach rechts usw.)
Für welche Werte von m und n ist es möglich, dass der Turm genau einmal jedes Feld erreicht und am Schluss auf das Ausgangsfeld zurückkommt? (Als erreichte Felder gelten nur solche, auf denen der Turm Halt macht, nicht die übersprungenen.)

7. Wir zeichnen n konvexe Vierecke in die Ebene. Diese zerlegen die Ebene in Gebiete (eines der Gebiete ist unbeschränkt). Bestimmen Sie die größtmögliche Anzahl solcher Gebiete.

8. Sei P eine Menge von $n \geqslant 3$ Punkten in der Ebene, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine Menge T von $\binom{n-1}{2}$ Dreiecken zu wählen, deren Eckpunkte alle aus P stammen, so dass jedes der Dreiecke eine Seite hat, die in keinem anderen der Dreiecke als Seite auftritt?

9. Zwei Zauberkünstler führen folgenden Trick vor:
Der erste Zauberer verlässt den Raum. Der zweite lässt nacheinander drei Zuschauer je eine Karte aus einem Kartenstapel von 100 Karten ziehen, die mit den Zahlen $1, 2, \ldots, 100$ durchnummeriert sind. Er schaut sich an, welche Karte jeder der drei Zuschauer gezogen hat, und wählt dann eine vierte Karte aus dem restlichen Stapel. Die Zuschauer mischen diese vier Karten, rufen den ersten Zauberer herein und geben ihm die vier Karten. Der erste Zauberer schaut sich die vier Karten an und „rät", welche Karte vom ersten Zuschauer stammt, welche vom zweiten und welche vom dritten.
Beweisen Sie, dass die Zauberkünstler diesen Trick durchführen können.

10. Sei N eine positive ganze Zahl.
Zwei Personen spielen das folgende Spiel: Der erste Spieler schreibt eine Liste von positiven ganzen Zahlen auf, die nicht größer als 25 und nicht notwendigerweise voneinander verschieden sind. Die Summe dieser Zahlen beträgt mindestens 200. Der zweite Spieler gewinnt, wenn es ihm gelingt, einige dieser Zahlen so auszuwählen, dass ihre Summe S die Bedingung $200 - N \leqslant S \leqslant 200 + N$ erfüllt.
Welches ist die kleinste Zahl N, für die der zweite Spieler eine Gewinnstrategie hat?

11. Sei n eine positive ganze Zahl. Es liegen n Punkte so in der Ebene, dass keine drei kollinear sind und sie paarweise unterschiedliche Abstände voneinander haben. Jetzt wird nacheinander jeder der Punkte mit seinen beiden nächsten Nachbarn durch eine Strecke verbunden. Beweisen Sie, dass am Ende keiner der Punkte mit mehr als 11 anderen Punkten verbunden ist.

12. In der Ebene sei eine Menge S von vier verschiedenen Punkten gegeben. Es ist bekannt, dass für jeden Punkt $X \in S$ die anderen drei Punkte so mit Y, Z und W bezeichnet werden können, dass
$$\overline{XY} = \overline{XZ} + \overline{XW}$$
gilt. Beweisen Sie, dass dann alle vier Punkte auf einer Geraden liegen.

13. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $\angle BAC > \angle BCA$, und sei D ein Punkt auf der Seite AC mit $\overline{AB} = \overline{BD}$. Weiterhin sei F ein Punkt auf dem Umkreis des Dreiecks ABC, so dass die Gerade FD senkrecht zur Seite BC ist und F und B auf verschiedenen Seiten der Geraden AC liegen. Beweisen Sie, dass dann die Gerade FB senkrecht zu AC ist.

14. Es seien L, M und N Punkte auf den Seiten AC, AB bzw. BC des Dreiecks ABC, so dass BL die Winkelhalbierende von $\angle ABC$ bildet und sich die Strecken AN, BL und CM in einem Punkt treffen. Beweisen Sie: Wenn $\angle ALB = \angle MNB$, dann $\angle LNM = 90^\circ$.

15. Eine Spinne und eine Fliege sitzen auf einem Würfel. Die Fliege möchte den kürzesten Weg zur Spinne auf der Würfeloberfläche möglichst groß machen. Ist es für die Fliege notwendigerweise am besten, sich genau gegenüber der Spinne zu platzieren?
(„Genau gegenüber" bedeutet „symmetrisch bezüglich der Würfelmitte".)

16. Bestimmen Sie alle nichtnegativen ganzen Zahlen m, für die
$$a_m = \left(2^{2m+1}\right)^2 + 1$$
durch höchstens zwei verschiedene Primzahlen teilbar ist.

17. Beweisen Sie, dass die Folge
$$\binom{2002}{2002}, \binom{2003}{2002}, \binom{2004}{2002}, \ldots,$$
periodisch ist, wenn man sie modulo 2002 betrachtet.

18. Bestimmen Sie alle ganzen Zahlen $n > 1$, für die jeder Primfaktor von $n^6 - 1$ auch ein Teiler von $(n^3 - 1)(n^2 - 1)$ ist.

19. Sei n eine positive ganze Zahl. Beweisen Sie, dass die Gleichung
$$x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3n$$
keine Lösungen im Bereich der positiven rationalen Zahlen hat.

20. Gibt es eine unendliche nichtkonstante arithmetische Folge, bei der jedes Glied in der Form a^b dargestellt werden kann, wobei a und b positive ganze Zahlen sind und $b \geqslant 2$ ist?