Matemaatikaolümpiaad "Balti tee 2002"

Tartus, 2. novembril 2002

1. Leia võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a^3 + 3ab^2 + 3ac^2 - 6abc = 1 \\ b^3 + 3ba^2 + 3bc^2 - 6abc = 1 \\ c^3 + 3ca^2 + 3cb^2 - 6abc = 1 \end{cases}$$

kõik reaalarvulised lahendid.

2. Olgu a, b, c, d reaalarvud, mille korral

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= -2\,, \\ ab + ac + ad + bc + bd + cd &= 0\,. \end{aligned}$$

Tõesta, et vähemalt üks arvudest a, b, c, d pole suurem kui -1.

3. Leia kõik reaalarvujadad $a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$, mille korral

$$a_{m^2+n^2} = a_m^2 + a_n^2$$

kõigi täisarvude $m, n \geqslant 0$ korral.

4. Olgu n positiivne täisarv. Tõesta, et

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(1 - x_i)^2 \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$$

mistahes selliste mittenegatiivsete reaalarvude $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jaoks, mille korral $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$.

5. Leia kõik positiivsete ratsionaalarvude paarid (a, b), mille korral

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}\,.$$

6. Ristkülikukujulisel ühikruutudeks jaotatud $m \times n$ laual, $m, n \geqslant 2$, mängitakse järgmist mängu. Algul asetatakse ühele ruudule vanker. Igal käigul saab vankri nihutada suvalise arvu ruute horisontaal- või vertikaalsuunas, kusjuures iga käigu peab tegema suunas, mis on eelmise käigu suunaga võrreldes 90° päripäeva (nt pärast käiku vasakule tuleb käia üles, seejärel paremale jne). Milliste m ja n väärtuste korral on võimalik, et vanker käib laua igal ruudul täpselt ühe korra ja pöördub lõpuks algruudule tagasi? (Vanker loetakse käinuks ainult ruutudel, millel ta peatub, mitte neil, millest ta üle sõidab.)

7. Joonestame tasandile n kumerat nelinurka. Need jaotavad tasandi piirkondadeks (üks piirkondadest on lõpmatu). Leia nende piirkondade suurim võimalik arv.

8. Olgu P hulk tasandi $n \geqslant 3$ punktist, millest ükski kolm ei asu ühel sirgel. Mitu võimalust on valida hulka T, mis koosneb $\binom{n-1}{2}$ kolmnurgast, mille tipud kuuluvad hulka P, nii et igal kolmnurgal hulgast T leidub külg, mis ei ole hulga T ühegi teise kolmnurga küljeks?

9. Kaks mustkunstnikku näitavad järgmist trikki. Esimene mustkunstnik läheb ruumist välja. Teine mustkunstnik võtab paki 100 kaardiga, mis on nummerdatud arvudega $1, 2, \ldots, 100$, ja laseb kolmel pealtvaatajal järgemööda valida igaühel ühe kaardi. Teine mustkunstnik näeb, millise kaardi iga pealtvaataja on võtnud. Seejärel lisab ta ühe kaardi ülejäänud pakist. Pealtvaatajad segavad need 4 kaarti, kutsuvad esimese mustkunstniku ja annavad need talle. Esimene mustkunstnik vaatab neid 4 kaarti ja "mõistatab", millise kaardi võttis esimene, millise teine ja millise kolmas pealtvaataja. Tõesta, et mustkunstnikud saavad seda trikki teha.

10. Olgu N positiivne täisarv. Kaks inimest mängivad järgmist mängu. Esimene kirjutab nimekirja mitte tingimata erinevatest positiivsetest täisarvudest, mis pole suuremad kui 25 ning mille summa on vähemalt 200. Teine mängija võidab, kui ta saab neist arvudest välja eraldada niisugused, mille summa S rahuldab tingimust $200 - N \leqslant S \leqslant 200 + N$. Milline on N vähim väärtus, mille korral teisel mängijal on võitev strateegia?

11. Olgu n positiivne täisarv. Vaatleme tasandil n punkti, mille korral ükski kolm neist pole ühel sirgel ja erinevate punktipaaride vahelised kaugused on erinevad. Ükshaaval ühendame iga punkti sirglõigu abil kahe temale lähima punktiga (kui mõni sirglõik on sellesse punkti juba tõmmatud, me neid ei kustuta). Tõesta, et ühestki punktist pole tõmmatud sirglõike rohkem kui 11 punkti.

12. Tasandil on antud neljast erinevast punktist koosnev hulk S. On teada, et iga punkti $X \in S$ korral saab ülejäänud punktid tähistada tähtedega Y, Z ja W, nii et

$$|XY| = |XZ| + |XW|.$$

Tõesta, et need neli punkti asuvad ühel sirgel.

13. Olgu ABC teravnurkne kolmnurk, kus $\angle BAC > \angle BCA$, ja olgu D selline punkt küljel AC, et $|AB| = |BD|$. Kolmnurga ABC ümberringjoonel võetakse punkt F nii, et FD on risti küljega BC ning punktid F ja B asuvad sirgest AC erineval pool. Tõesta, et sirge FB on risti küljega AC.

14. Kolmnurga ABC külgedel AC, AB ja BC võetakse vastavalt punktid L, M ja N nii, et BL on nurga ABC poolitaja ning lõigud AN, BL ja CM lõikuvad ühes punktis. Tõesta, et kui $\angle ALB = \angle MNB$, siis $\angle LNM = 90^\circ$.

15. Ämblik ja kärbes istuvad kuubil. Kärbes üritab maksimiseerida lühimat teed ämblikuni mööda kuubi pinda. Kas kärbse jaoks on alati parim olla ämbliku asukoha vastaspunktis? ("Vastaspunkt" tähendab "sümmeetriline punkt kuubi keskpunkti suhtes".)

16. Leia kõik mittenegatiivsed täisarvud m, mille korral

$$a_m = (2^{2m+1})^2 + 1$$

jagub ülimalt kahe erineva algarvuga.

17. Näita, et jada

$$\binom{2002}{2002},\ \binom{2003}{2002},\ \binom{2004}{2002},\ \ldots\ ,$$

vaadeldud mooduli 2002 järgi, on perioodiline.

18. Leia kõik täisarvud $n > 1$, mille korral arvu $n^6 - 1$ iga algtegur on arvu $(n^3 - 1)(n^2 - 1)$ tegur.

19. Olgu n positiivne täisarv. Tõesta, et võrrandil

$$x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3n$$

puuduvad lahendid positiivsete ratsionaalarvude hulgas.

20. Kas leidub selline mittekonstantne aritmeetiline jada, mille iga liige esitub kujul a^b, kus a ja b on positiivsed täisarvud ning $b \geqslant 2$?

Ülesannete lahendused

1. *Vastus:* $a = 1\,,\ b = 1\,,\ c = 1\,.$
   Tähistagu A, B ja C antud võrrandite vasakuid pooli, siis

$$\begin{aligned} -A + B + C &= (-a + b + c)^3\ , \\ A - B + C &= (a - b + c)^3\ , \\ A + B - C &= (a + b - c)^3\ . \end{aligned}$$

   Seega on ülesandes antud võrrandisüsteem samaväärne võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} (-a + b + c)^3 &= 1 \\ (a - b + c)^3 &= 1 \\ (a + b - c)^3 &= 1 \end{cases}$$

   ehk

$$\begin{cases} -a + b + c &= 1 \\ a - b + c &= 1 \\ a + b - c &= 1 \end{cases}.$$

   Viimase võrrandisüsteemi ainus lahend on $(a, b, c) = (1, 1, 1)$.

2. Üldisust kitsendamata eeldame, et a on minimaalne arvudest a, b, c, d ning arvude a, b, c, d seas on $n > 0$ negatiivset arvu ja positiivsete arvude summa on x. Siis

$$-2 = a + b + c + d \geqslant na + x\ . \tag{1}$$

   Ruutu tõstes saame

$$4 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2\ ,$$

   kust

$$4 \leqslant n \cdot a^2 + x^2\ , \tag{2}$$

   sest positiivsete arvude summa ruut ei ole väiksem nende ruutude summast

   Võrdustest (1) ja (2) saame

$$\begin{aligned} na^2 + (na + 2)^2 &\geqslant 4\ , \\ na^2 + n^2a^2 + 4na &\geqslant 0\ , \\ a^2 + na^2 + 4a &\geqslant 0\ . \end{aligned}$$

   Kuna $n \leqslant 3$ (kui kõik neli arvu oleks negatiivsed, ei saaks ülesande teine tingimus kehtida), siis viimasest võrratusest saame

$$\begin{aligned} 4a^2 + 4a &\geqslant 0\ , \\ a(a + 1) &\geqslant 0\ . \end{aligned}$$

Et $a < 0$, siis järeldame siit, et $a \leqslant -1$.

3. *Vastus:* $a_n \equiv 0$, $a_n \equiv \frac{1}{2}$ ja $a_n = n$.

Tähistame $f(n) = a_n$, siis

$$f(m^2 + n^2) = f^2(m) + f^2(n) \ . \tag{3}$$

Võttes siin $m = n = 0$, saame $f(0) = 2f^2(0)$, kust $f(0) = \frac{1}{2}$ või $f(0) = 0$. Vaatleme neid juhte eraldi.

1. Kui $f(0) = \frac{1}{2}$, siis võttes võrduses (3) $m = 1$, $n = 0$ saame $f(1) = f^2(1) + \frac{1}{4}$, kust $\left(f(1) - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$ ja $f(1) = \frac{1}{2}$. Nüüd leiame

$$\begin{aligned} f(2) &= f(1^2 + 1^2) = 2f^2(1) = \frac{1}{2} \ , \\ f(8) &= f(2^2 + 2^2) = 2f^2(2) = \frac{1}{2} \ , \end{aligned}$$

jne. Näeme, et $f(2^i) = \frac{1}{2}$ kuitahes suurte naturaalarvude i jaoks, millest monotoonsuse tõttu järeldub, et $f(n) = \frac{1}{2}$ iga naturaalarvu n korral.

2. Kui $f(0) = 0$, siis võttes võrduses (3) $m = 1$, $n = 0$ saame $f(1) = f^2(1)$, kust $f(1) = 0$ või $f(1) = 1$. Uurime edasi kumbagi neist võimalustest.

Kui $f(0) = 0$ ja $f(1) = 0$, siis eelnevaga sarnaselt arutledes leiame, et $f(2^i) = 0$ kuitahes suurte naturaalarvude i jaoks, millest järeldub, et $f(n) = 0$ iga naturaalarvu n korral.

Kui $f(0) = 0$ ja $f(1) = 1$, siis

$$\begin{aligned} f(2) &= f(1^2 + 1^2) = 2f^2(1) = 2 \ , \\ f(4) &= f(2^2 + 0^2) = f^2(2) = 4 \ , \\ f(5) &= f(2^2 + 1^2) = f^2(2) + f^2(1) = 5 \ . \end{aligned}$$

Nüüd

$$f^2(3) + f^2(4) = f(25) = f^2(5) + f^2(0) = 25 \ ,$$

kust $f^2(3) = 25 - 16 = 9$ ja $f(3) = 3$. Edasi saame

$$\begin{aligned} f(8) &= f(2^2 + 2^2) = 2f^2(2) = 8 \ , \\ f(9) &= f(3^2 + 0^2) = f^2(3) = 9 \ , \\ f(10) &= f(3^2 + 1^2) = f^2(3) + f^2(1) = 10 \ . \end{aligned}$$

Võrdustest

$$\begin{aligned} f^2(6) + f^2(8) &= f^2(10) + f^2(0) \ , \\ f^2(7) + f^2(1) &= f^2(5) + f^2(5) \end{aligned}$$

leiame, et $f(6) = 6$ ja $f(7) = 7$. Jääb üle tähele panna, et

$$(2k+1)^2 + (k-2)^2 = (2k-1)^2 + (k+2)^2 \ ,$$
$$(2k+2)^2 + (k-4)^2 = (2k-2)^2 + (k+4)^2 \ ,$$

kust induktsiooniga saame, et $f(n) = n$ iga naturaalarvu n korral.

4. Avades mõlemal pool sulud ja lihtsustades saame tõestatava võrratuse teisendada kujule

$$-\sum_i x_i^3 + 2\sum_i x_i^2 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \geqslant 0 \ .$$

Selle võrratuse vasak pool on

$$\sum_i \Big(2 - \frac{2}{n} - x_i\Big)\Big(x_i - \frac{1}{n}\Big)^2$$

ning seega tõepoolest mittenegatiivne.

5. *Vastus:* $(a,\, b) = \Big(\frac{1}{2},\, \frac{3}{2}\Big)$ või $(a,\, b) = \Big(\frac{3}{2},\, \frac{1}{2}\Big)$.

Tõstes antud võrduse pooled ruutu, saame

$$a + b + 2\sqrt{ab} = 2 + \sqrt{3} \ . \tag{4}$$

Järelikult $2\sqrt{ab} = r + \sqrt{3}$, kus r on ratsionaalarv. Tõstes selle võrduse pooled ruutu, saame $4ab = r^2 + 3 + 2r\sqrt{3}$, s.t. $2r\sqrt{3}$ on ratsionaalarv. See on võimalik ainult juhul, kui $r = 0$. Niisiis $ab = \frac{3}{4}$ ning võrdusest (4) saame $a + b = 2$. Lahendades neist kahest võrrandist koosneva süsteemi saame $(a,\, b) = \Big(\frac{1}{2},\, \frac{3}{2}\Big)$ või $(a,\, b) = \Big(\frac{3}{2},\, \frac{1}{2}\Big)$.

6. *Vastus:* m ja n on mõlemad paarisarvud.

Vaatleme kõigepealt mistahes sellist rida, millelt vanker liikumist ei alusta. Et vanker peab viibima selle rea igal ruudul ühe korra ning iga korraga, kui vanker sellele reale käib, viibib ta parajasti kahel selle rea ruudul, siis peab m olema paarisarv. Samasugune arutlus veergude jaoks näitab, et ka n peab olema paarisarv.

Jääb üle näidata, et mistahes paarisarvude m ja n korral on vankril võimalik nõutud viisil kõik ruudud läbida. Tähistame ruudud arvupaaridega (i, j), kus $1 \leqslant i \leqslant m$ ja $1 \leqslant j \leqslant n$. Alustagu vanker liikumist ruudult $(m/2{+}1, 1)$ ning läbigu kõigepealt joonisel näidatud järjekorras kõik ruudud alumises ja ülemises reas peale ruutude $(m/2 - 1, n)$ ja $(m/2 + 1, n)$; viimasena astub vanker siis ruudule $(m/2 - 1, 1)$.

3	7			8	4
2	6	10	1	9	5

Edasi liikugu vanker ruudule $(m/2-1, n-1)$ ning läbigu siis sarnasel viisil kõik ruudud 2. ja $(n-1)$. reas, välja arvatud 2. rea kaks keskmist ruutu. Niiviisi jätkates saab vanker läbida kõik ruudud peale kahe keskmise ruudu igas paarisnumbriga reas (siin kasutame eeldust, et m ja n on paarisarvud):

3	7			8	4
15	19	11	20	16	12
23	27			28	24
35	39	31	40	36	32
34	38			37	33
22	26	30	21	29	25
14	18			17	13
2	6	10	1	9	5

Lõpuks saab vanker läbida ka need järelejäänud ruudud, jõudes lõpuks algruudule tagasi:

3	7	47	48	8	4
15	19	11	20	16	12
23	27	43	44	28	24
35	39	31	40	36	32
34	38	42	41	37	33
22	26	30	21	29	25
14	18	46	45	17	13
2	6	10	1	9	5

7. *Vastus:* $4n^2 - 4n + 2$.

Esimene nelinurk jaotab tasandi 2 piirkonnaks. Olgu nüüd joonestatud k nelinurka $Q_1, \ldots, Q_k$, mis jaotavad tasandi a_k piirkonnaks. Uurime, milline saab olla piirkondade arv a_{k+1} järgmise nelinurga Q_{k+1} lisamise järel. Paneme tähele, et juhul, kui a_{k+1} on maksimaalne, ei paikne ühegi nelinurga Q_i ükski tipp ühegi teise nelinurga rajajoonel, kuna vastasel korral võiksime seda tippu veidi nihutades ühe piirkonna juurde lisada.

Ülaltoodud tähelepanekust ning nelinurkade Q_j kumerusest järeldub, et igaüks nelinurga Q_{k+1} neljast küljest omab ühiseid punkte ülimalt kahe küljega igast nelinurgast Q_j, kus $1 \leqslant j \leqslant k$. Seega jaotub Q_{k+1} iga külg ülimalt $2k+1$ lõiguks, millest igaüks võib piirkondade arvu suurendada ühe võrra (olles ühiseks rajajooneks kahele piirkonnale, millest üks on juba a_k juures arvesse võetud).

Paneme tähele, et kui Q_{k+1} mingi külg lõikab iga Q_j, $1 \leqslant j \leqslant k$ rajajoont kaks korda, siis selle külje otspunktid (Q_{k+1} tipud) paiknevad kõikidest nelinurkadest Q_j väljapoole jääval tasandi osal, ning igast tipust lähtuvad Q_{k+1} kahe serva osad saavad seega anda ainult ühe uue tasandi piirkonna. Seega $a_{k+1} - a_k \leqslant 4(2k+1) - 4 = 8k$. Maksimum $a_{k+1} - a_k = 8k$ saavutatakse näiteks juhul, kui nelinurgad Q_k on ruudud, mille tipud paiknevad kõik ühel ja samal ringjoonel.

Jääb üle leida avaldis a_k maksimaalse väärtuse jaoks. Et avaldis $a_{k+1} - a_k = 8k$ on lineaarne k suhtes, siis a_k avaldis on ruutpolünoom k suhtes, kusjuures $a_0 = 2$. Seega $a_k = Ak^2 + Bk + 2$. Et iga k korral $8k = a_{k+1} - a_k = A(2k+1) + B$, siis saame $A = 4$, $B = -4$ ning $a_n = 4n^2 - 4n + 2$.

8. *Vastus:* Üks võimalus $n = 3$ korral ja n võimalust $n \geqslant 4$ korral.

Olgu mistahes fikseeritud punkti $x \in P$ korral T_x kõigi nende kolmnurkade hulk, mille kõik tipud on hulga P punktid ning üks tippudest on punkt x. Siis $|T_x| = \binom{n-1}{2}$ ning hulga T_x igal kolmnurgal leidub külg, mis ei ole hulga T_x ühegi teise kolmnurga küljeks. Kui $n \geqslant 4$, siis mistahes kahe punkti $x \neq y$ korral hulgast P on $T_x \neq T_y$; $n = 3$ korral on meil üksainus kolmnurk ning kõik hulgad T_x langevad kokku. Näitame nüüd, et iga ülesande tingimustele vastav hulk T peab olema üks hulkadest T_x, s.t. $n = 3$ korral on selliseid hulki 1 ning $n \geqslant 4$ korral n.

Olgu C hulk, mille elementideks on kõik need $\binom{n}{3}$ kolmnurka, mille kõik tipud kuuluvad hulka P. Olgu

$$T = \left\{t_i : i = 1, 2, \ldots, \binom{n-1}{2}\right\}, \qquad S = \left\{s_i : i = 1, 2, \ldots, \binom{n-1}{2}\right\},$$

kus t_i on kolmnurgad hulgast C ning s_i on kolmnurga t_i külg, mis ei ole ühegi teise kolmnurga t_j, $j \neq i$, küljeks. Paneme tähele, et

$$|C \setminus T| = \binom{n}{3} - \binom{n-1}{2} = \binom{n-1}{3}.$$

Olgu m selliste paaride (s, t) arv, kus $s \in S$ on kolmnurga $t \in C \setminus T$ küljeks. Et iga $s \in S$ on küljeks täpselt $n - 3$ kolmnurgale hulgast $C \setminus T$, siis

$$m = |S| \cdot (n-3) = \binom{n-1}{2} \cdot (n-3) = 3 \cdot \binom{n-1}{3} = 3 \cdot |C \setminus T|.$$

Teiselt poolt on aga igal kolmnurgal $t \in C \setminus T$ parajasti kolm külge, mis võivad kuuluda hulka S. Seega näitab ülaltoodud võrdus, et iga kolmnurga $t \in C \setminus T$ kõik küljed kuuluvad hulka S.

Olgu $p \in P$ mistahes selline punkt, mis on mingi külje $s \in S$ otspunktiks. Siis p on tipuks igaühele neist $n - 3$ kolmnurgast hulgas $C \setminus T$, mille küljeks s on. Järelikult on p otspunktiks $n - 2$ küljele hulgast S. Et igal küljel hulgas S on parajasti 2 otspunkti, siis selliste punktide $p \in P$ arv, mis on mingi külje $s \in S$ otspunktiks, on

$$\frac{2 \cdot |S|}{n-2} = \frac{2}{n-2} \cdot \binom{n-1}{2} = n - 1.$$

Järelikult leidub punkt $x \in P$, mis ei ole ühegi külje $s \in S$ otspunktiks, ning $T = T_x$.

9. Teine mustkunstnik peab valima oma kaardi nii, et esimesel mustkunstnikul oleks võimalik selle järgi määrata, millise neljast 4 kaardist valis teine mustkunstnik ning millises järjekorras valisid pealtvaatajad ülejäänud kolm kaarti. Olgu a, b, c pealtvaatajate valitud kaartide numbrite 5-ga jagamisel tekkivad jäägid. Vaatleme kolme võimalikku juhtu.

1) *Jäägid a, b, c on kõik võrdsed.* Siis valigu teine mustkunstnik selline kaart, mille numbri 5-ga jagamisel tekkiv jääk d erineb jäägist $a = b = c$. Nüüd annavad nelja valitud kaardi numbrid 5-ga jagamisel 2 *erinevat jääki, millest üks esineb* 3 *korda* — selle järgi saab esimene mustkunstnik aru, et on tegemist vaadeldava juhuga, ning eristab

ühtlasi teise mustkunstniku valitud kaardi. Jääb üle määrata kood, mille järgi esimene mustkunstnik saab määrata pealtvaatajate valitud kaartide järjekorra. Vaadeldes nende kolme kaardi numbrite suuruse järjekorda ja neid valinud pealtvaatajate järjekorda, saame 6 võimalikku permutatsiooni, mida esimene mustkunstnik peab eristama. Selleks võib teine mustkunstnik valida kaardi numbriga $5k+d$, kus k on vastava permutatsiooni number (permutatsioonide nummerdamise järjekorra lepivad mustkunstnikud eelnevalt omavahel kokku).

2) *Jäägid a, b, c on kõik erinevad.* Siis kehtib parajasti üks järgmisest kolmest võrdusest:

$$\begin{aligned} |b-a| &\equiv |a-c| \pmod 5, \\ |a-b| &\equiv |b-c| \pmod 5, \\ |a-c| &\equiv |c-b| \pmod 5. \end{aligned} \tag{5}$$

Selles veendumiseks võime jääke vaadelda korrapärase viisnurga tippudena — mistahes kolm neist moodustavad võrdhaarse, kuid mitte võrdkülgse kolmnurga.

Nimetame jääkidest a, b ja c *eriliseks* seda, mis esineb parajasti kehtiva võrduse 5 mõlemas pooles. Valigu nüüd teine mustkunstnik selline kaart, mille numbri 5-ga jagamisel tekkiv jääk d on eriline. Nüüd annavad nelja valitud kaardi numbrid 5-ga jagamisel 3 *erinevat jääki, millest üks on eriline ning esineb* 2 *korda* — selle järgi saab esimene mustkunstnik aru, et on tegemist vaadeldava juhuga. Jääb üle valida kaardi number nii, et esimene mustkunstnik saaks määrata teise mustkunstniku valitud kaardi ning pealtvaatajate valitud kaartide järjekorra.

Olgu $s = 5m + d$ vastav *pealtvaataja poolt valitud kaart.* Siis teine mustkunstnik võib valida kaardi numbriga $s + 5k \pmod{100}$, kus k on eelmises alapunktis mainitud permutatsiooni number. Esimene mustkunstnik saab nüüd kaartide kuuluvuse määrata järgmisel viisil. Kõigepealt leiab ta need kaks kaarti, mille numbrid p ja q annavad 5-ga jagamisel sama jäägi, ning leiab $p - q \pmod{100}$ and $q - p \pmod{100}$. Kui $p - q \pmod{100} > q - p \pmod{100}$, siis q on teise mustkunstniku ja p pealtvaataja valitud kaart (sest nende kahe arvu summa on 100 ning $6 \cdot 5 = 30 < 50$). Vahe $q - p$ järgi leiab ta nüüd permutatsiooni numbri, mis määrab, millise kaardi keegi pealtvaatajatest valis.

3) *Kaks jääki (olgu need a ja b) on võrdsed ja kolmas neist erinev.* Siis valigu teine mustkunstnik selline kaart, mille numbri 5-ga jagamisel tekkiv jääk on $d = \dfrac{a+c}{2} \pmod 5$. Siis $|a-d| = |d-c| \pmod 5$, seega a, c, d on d eriline. Niisiis annavad nelja valitud kaardi numbrid nüüd 5-ga jagamisel 3 *erinevat jääki, millest üks on eriline ning üks mitte-erilistest esineb* 2 *korda* — selle järgi saab esimene mustkunstnik aru, et on tegemist vaadeldava juhuga, ning eristab ühtlasi teise mustkunstniku valitud kaardi. Jääb üle valida kaardi number nii, et esimene mustkunstnik saaks selle järgi määrata pealtvaatajate valitud kaartide järjekorra — seda võime teha samuti nagu esimesel juhul.

10. *Vastus:* $N = 11$.

Olgu $N = 11$, siis teine mängija võib valida arve kasvavas järjekorras, kuni järelejäävate arvude summa on väiksem kui 212. Kui viimane valitud arv ei olnud 24 ega 25, siis järelejäävate arvude summa on vähemalt $212 - 23 = 189$. Kui viimane valitud arv oli 24 või 25, siis jäid järele ainult arvud 24 ja 25 ning neid peab olema täpselt 8, sest nende summa S peab olema väiksem kui 212 ja mitte väiksem kui $212 - 24 = 188$. Niisiis $8 \cdot 24 = 192 \leqslant S \leqslant 8 \cdot 25 = 200$. Mõlemal juhul teine mängija võidab.

Teisalt, kui $N \leqslant 10$, siis esimene mängija võib kirjutada kaks korda arvu 25 ja seitse korda arvu 23. Kõigi kirjutatud arvude summa on siis 211 ning mistahes arvu eemaldamisel järelejäävate arvude summa on ülimalt 188 — seega teine mängija ei saa võita.

11. Oletame vastuväiteliselt, et leidub punkt A, millest on tõmmatud lõigud vähemalt 12 punkti. Siis leiduvad nende seas sellised punktid B, C ja D, et $\angle BAC \leqslant 60^\circ$, $\angle BAD \leqslant 60^\circ$ and $\angle CAD \leqslant 60^\circ$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $|AD| > |AB|$ and $|AD| > |AC|$. Koosinusteoreemist kolmnurgas ABD saame

$$\begin{aligned} |BD|^2 &= |AD|^2 + |AB|^2 - 2|AD||AB|\cos\angle BAD \\ &< |AD|^2 + |AB|^2 - 2|AB|^2\cos\angle BAD \\ &= |AD|^2 + |AB|^2(1 - 2\cos\angle BAD) \\ &\leqslant |AD|^2 , \end{aligned}$$

kuna $1 \leqslant 2\cos(\angle BAD)$. Seega $|BD| < |AD|$ ning analoogiliselt saame $|CD| < |AD|$. Järelikult ei peaks punktid A ja D olema lõiguga ühendatud — vastuolu.

12. Olgu $S = \{A, B, C, D\}$ ning olgu lõik AB maksimaalse pikkusega neid nelja punkti paarikaupa ühendavatest lõikude hulgas. Kui valime $X = A$, siis peab olema $Y = B$ — tõepoolest, valides näiteks $Y = C$, saaksime $|AC| = |AB| + |AD|$, mis on vastuolus lõigu AB pikkuse maksimaalsusega. Seega

$$|AB| = |AC| + |AD| . \tag{6}$$

Analoogiliselt saame, et $X = B$ korral peab olema $Y = A$ ning järelikult

$$|AB| = |BC| + |BD| . \tag{7}$$

Teisest küljest saame kolmnurgavõrratusest, et

$$\begin{aligned} |AB| &\leqslant |AC| + |BC| , \\ |AB| &\leqslant |AD| + |BD| , \end{aligned}$$

kusjuures juhul, kui kõik neli vaadeldavat punkti ei paikne ühel sirgel, on vähemalt üks neist võrratustest range. Liites nende võrratuste vastavad pooled, saame siis

$$2|AB| < |AC| + |BC| + |AD| + |BD| .$$

Liites aga võrratuste (6) and (7) vastavad pooled, saame

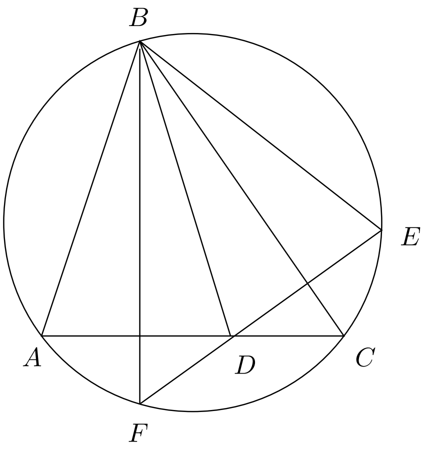
$$2|AB| = |AC| + |AD| + |BC| + |BD| ,$$

vastuolu.

13. Olgu $E \neq A$ selline punkt kolmnurga ABC ümberringjoonel, et $|AB| = |EB|$, ning olgu D' küljele BC läbi punkti E tõmmatud ristsirge lõikepunkt küljega AC (vt. joonist 1). Siis $\angle ECB = \angle BCA$ ning kolmnurk ECD' on võrdhaarne. Et ED' on risti küljega BC, siis kolmnurk BED' on samuti võrdhaarne ning $|BE| = |BD'|$, millest järeldub, et $D = D'$. Niisiis paiknevad punktid E, D, F ühel sirgel ning

$$\angle EFB + \angle FDA = \angle BCA + \angle EDC = 90^\circ ,$$

millest ilmselt järeldub, et FB ja AC on risti.



Joonis 1

14. Olgu P sirgete MN ja AC lõikepunkt. Siis $\angle PLB = \angle PNB$ ning $PLNB$ on kõõlnelinurk. Olgu ω nelinurga $PLNB$ ümberringjoon. Piisab tõestada, et PL on ringjoone ω diameeter.

Olgu Q sirge AB teine lõikepunkt ringjoonega ω. Siis $\angle PQB = \angle PLB$ ning

$$\angle QPL = \angle QBL = \angle LBN = \angle LPN \ ,$$

s.t. kolmnurgad PAQ ja BAL on sarnased. Seega

$$\frac{|PQ|}{|PA|} = \frac{|BL|}{|BA|} \ . \tag{8}$$

Järelikult on PL nurga NPQ poolitaja. Näitamaks, et PL on ringjoone ω diameeter, piisab nüüd tõestada, et $|PN| = |PQ|$.

Et kolmnurgad NPC ja LBC on sarnased, siis

$$\frac{|PN|}{|PC|} = \frac{|BL|}{|BC|} \ . \tag{9}$$

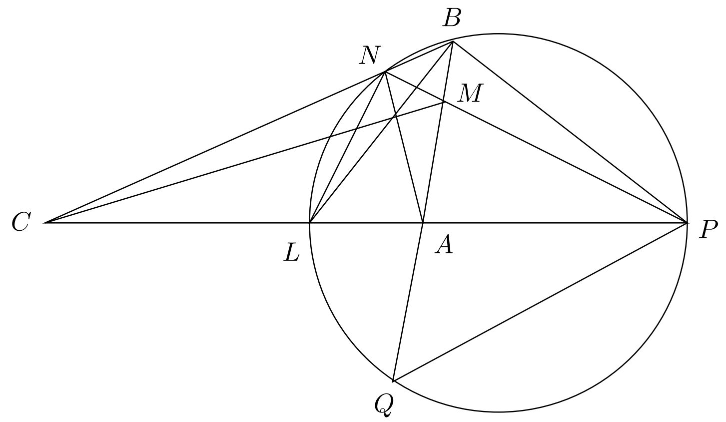
Teisalt saame nurgapoolitaja omadusest, et

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AL|}{|CL|} \ . \tag{10}$$

Kombineerides võrdused (8), (9) ja (10) saame, et

$$\frac{|PN|}{|PQ|} = \frac{|AL|}{|AP|} \cdot \frac{|CP|}{|CL|} \ .$$

Meil on vaja näidata, et selle võrduse vasak pool on võrdne 1-ga. See omakorda järeldub sellest, et punktide nelik (P, A, L, C) on harmooniline (selles veendumiseks võime vaadelda nelinurka $MBNS$, kus $S = MC \cap AN$).



Joonis 2

15. *Vastus:* ei.

Olgu kuubi serva pikkus 1 ning asugu ämblik kuubi mingi serva keskpunktis. Siis lühim tee ämbliku asukohast vastasserva keskpunktini mööda kuubi pinda on pikkusega 2. Kui aga kärbes asub vastasserva punktis, mille kaugus selle serva keskpunktist on s, siis lühima tee pikkus ämbliku asukohast kärbse asukohani on

$$\min\Big(\sqrt{4+s^2}, \sqrt{\frac{9}{4}+\Big(\frac{3}{2}-s\Big)^2}\Big).$$

Kui $0 < s < \dfrac{3-\sqrt{7}}{2}$, siis selle avaldise väärtus on suurem kui 2.

16. *Vastus:* $m = 0, 1, 2$.

Ilmselt $m = 0, 1, 2$ on lahendid: $a_0 = 5$, $a_1 = 65 = 5 \cdot 13$ ja $a_2 = 1025 = 25 \cdot 41$. Näitame, et rohkem lahendeid ei ole.

Oletame vastuväiteliselt, et mingi $m \geqslant 3$ korral a_m jagub ülimalt kahe erineva algarvuga. Paneme tähele, et arv $a_m = 4^{2m+1} + 1$ jagub 5-ga ning

$$a_m = (2^{2m+1} + 2^{m+1} + 1) \cdot (2^{2m+1} - 2^{m+1} + 1) .$$

Arvud $2^{2m+1} + 2^{m+1} + 1$ ja $2^{2m+1} - 2^{m+1} + 1$ on ühistegurita, sest nad on mõlemad paaritud ning nende vahe on arvu 2 aste. Et nad mõlemad on suuremad 1-st, siis üks neist peab olema arvu 5 aste. Niisiis

$$2^{m+1} \cdot (2^m \pm 1) = 5^t - 1 = (5-1) \cdot (1 + 5 + \cdots + 5^{t-1})$$

mingi positiivse täisarvu t korral, kus $\pm$ tähistab *ühte* märkidest $+$ ja $-$. Paarituarvulise t korral selle võrduse parem pool ei jagu 8-ga, mis on vastuolus eeldusega, et $m \geqslant 3$. Järelikult peab t olema paarisarv ning

$$2^{m+1} \cdot (2^m \pm 1) = (5^{t/2} - 1) \cdot (5^{t/2} + 1) .$$

Ilmselt $5^{t/2}+1 \equiv 2 \pmod 4$. Seega $5^{t/2}-1 = 2^m \cdot k$ mingi paaritu arvu k korral ning $5^{t/2}+1 = 2^m \cdot k + 2$ on arvu $2(2^m \pm 1)$ jagaja, s.t.

$$2^{m-1} \cdot k + 1 \mid 2^m \pm 1 \,.$$

Siit $k=1$, mis annab vastuolu, sest

$$2^{m-1}+1 < 2^m \pm 1 < 2(2^{m-1}+1)\,,$$

kui $m \geqslant 3$.

17. Tähistame

$$x_n^k = \binom{n}{k}$$

ja paneme tähele, et

$$x_{n+1}^k - x_n^k = \binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} = x_n^{k-1}\,. \tag{11}$$

Näitame induktsiooniga k järgi, et jada $\{x_n^k\}_{n=k}^{\infty}$ on perioodiline vaadelduna mistahes mooduli m järgi. Kui $k=1$, siis $x_n^k = n$ ning väide ilmselt kehtib. Arvestades (11) piisab nüüd induktsiooni sammu jaoks näidata, et*kui jada $\{d_n\}$, kus $d_n = x_{n+1}-x_n$, on perioodiline mooduli m järgi, siis jada $\{x_n\}$ on samuti perioodiline mooduli m järgi.* Tõepoolest, olgu t jada $\{d_n\}$ periood ning olgu h vähim selline positiivne täisarv, et $h(x_t - x_0) \equiv 0 \pmod m$. Siis

$$\begin{aligned} x_{n+ht} &= x_0 + \sum_{j=0}^{n+ht-1} d_j = x_0 + \sum_{j=0}^{n-1} d_j + h\Big(\sum_{j=0}^{t-1} d_j\Big) = \\ &= x_n + h(x_t - x_0) \equiv x_n \pmod m \end{aligned}$$

mistahes positiivse täisarvu n korral, s.t. jada $\{x_n\}$ on perioodiline mooduli m järgi.

18. *Vastus:* $n=2$.
Ilmselt $n=2$ rahuldab ülesande tingimust. Näitame, et rohkem selliseid arve n ei ole. Olgu n suvaline ülesande tingimusi rahuldav arv, ning uurime tegurdust

$$n^6 - 1 = (n^2-n+1)(n+1)(n^3-1)\,.$$

Arvul $n^2-n+1 = n(n-1)+1$ leidub paaritu algtegur p. Et p on n^3+1 jagaja, siis p ei ole n^3-1 tegur ning peab järelikult olema n^2-1 jagaja. Seega arv $(n^3+1)+(n^2-1) = n^2(n+1)$ jagub p-ga.
Et p ei ole arvu n jagaja, siis peab ta olema $n+1$ jagaja ning samuti arvu $(n^2-1)-(n^2-n+1) = n-2$ jagaja. Järelikult on p arvude $n+1$ ja $n-2$ ühistegur, mistõttu $p=3$ ning $n^2-n+1 = 3^r$, kus r on mingi positiivne täisarv.
Ruutkolmliikme $n^2-n+(1-3^r)$ diskriminant

$$1-4(1-3^r) = 3(4\cdot 3^{r-1}-1)$$

peab siis olema täisarvu ruut. Et $r \geqslant 2$ korral arv $4 \cdot 3^{r-1} - 1$ ei jagu 3-ga, siis peab olema $r = 1$. Niisiis $n^2 - n - 2 = 0$ ja $n = 2$.

19. Oletame vastuväiteliselt, et arvud $x = \dfrac{p}{q}$ ja $y = \dfrac{r}{s}$ rahuldavad antud võrrandit, kus p, q, r, s on positiivsed täisarvud ning $\text{SÜT}\,(p, q) = 1$, $\text{SÜT}\,(r, s) = 1$. Siis

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} + \frac{q}{p} + \frac{s}{r} = 3n \ ,$$

ehk

$$(p^2 + q^2)rs + (r^2 + s^2)pq = 3npqrs \ ,$$

kust näeme, et rs on $(r^2 + s^2)pq$ jagaja. Et $\text{SÜT}\,(r, s) = 1$, siis $\text{SÜT}\,(r^2 + s^2, rs) = 1$ ning rs on pq jagaja. Analoogiliselt saame näidata, et pq on rs jagaja, seega $rs = pq$ ning arvude p, q, r, s seas on 3-ga jaguvaid arve kas täpselt kaks või mitte ühtegi. Nüüd

$$(p^2 + q^2)rs + (r^2 + s^2)rs = 3n(rs)^2 \ ,$$

ehk

$$p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = 3nrs \ ,$$

kuid $3nrs$ jagub 3-ga ning $p^2 + q^2 + r^2 + s^2$ annab 3-ga jagamisel jäägi 1 või 2 — vastuolu.

20. *Vastus:* ei.
Olgu d aritmeetilise jada a_1, a_2, ... vahe, siis

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 + d} + \ldots + \frac{1}{a_1 + nd} \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{m}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\right) , \end{aligned}$$

kus $m = \max(a_1, d)$. Seega n kasvades S_n kasvab piiramatult.
Teisalt aga mistahes naturaalarvu $x \neq 1$ jaoks kehtib võrdus

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \ldots = \frac{\frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{x(x-1)} \ .$$

Seega ülesandes nõutud omadusega aritmeetilise jada liikmete pöördarvude summa ei saa olla suurem kui

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots = 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots\right) = 2 \ ,$$

vastuolu.