Matemaatikaolümpiaad "Balti tee 2001"

Hamburgis, 4. novembril 2001

1. Eksamiks valmistati ette 8 ülesannet. Igale õpilasele anti neist 3. Iga kaks õpilast said ülimalt ühe ühise ülesande. Milline on suurim võimalik õpilaste arv?

2. Olgu $n \geqslant 2$ positiivne täisarv. Kas hulgal $\{1, 2, 3, \ldots\}$ leidub n sellist paarikaupa ühisosata mittetühja alamhulka, et iga positiivne täisarv esitub üheselt ülimalt n täisarvu summana, mis kuuluvad kõik erinevatesse alamhulkadesse?

3. Arvud 1, 2, ..., 49 paigutatakse 7×7 tabelisse ning arvutatakse iga rea ja veeru summa. Mõned neist 14 summast on paaritud, mõned paaris. Tähistagu A kõigi paaritute summade ning B kõigi paaris summade summat. Kas võib juhtuda, et $A = B$?

4. Olgu p ja q kaks erinevat algarvu. Tõesta, et

$$\left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{2p}{q}\right] + \left[\frac{3p}{q}\right] + \ldots + \left[\frac{(q-1)p}{q}\right] = \frac{1}{2}(p-1)(q-1) .$$

   (Siin $[x]$ tähistab suurimat täisarvu, mis pole suurem kui x.)

5. Ringjoonel antud 2001 punktist on igaüks värvitud punaseks või roheliseks. Ühel sammul värvitakse kõik punktid samaaegselt üle järgmise reegli alusel: kui mingi punkti P mõlemad naabrid on selle punktiga sama värvi, siis punkti P värv ei muutu, vastasel juhul värvitakse punkt P teist värvi. Alustades värvimisest F_1, saame selliste sammudega värvimised $F_2, F_3, \ldots$. Tõesta, et mingi $n_0 \leqslant 1000$ korral $F_{n_0} = F_{n_0+2}$. Kas väide kehtib ka siis, kui arv 1000 asendada arvuga 999?

6. Punktid A, B, C, D, E paiknevad ringjoonel c mainitud järjekorras, kusjuures $AB \parallel EC$ ja $AC \parallel ED$. Ringjoonele c punktis E tõmmatud puutuja lõikab sirget AB punktis P. Sirged BD ja EC lõikuvad punktis Q. Tõesta, et $|AC| = |PQ|$.

7. On antud rööpkülik $ABCD$. Punkti A läbiv ringjoon lõikab lõike AB, AC ja AD vastavalt nende sisepunktides M, K ja N. Tõesta, et

$$|AB| \cdot |AM| + |AD| \cdot |AN| = |AK| \cdot |AC| .$$

8. Olgu $ABCD$ kumer nelinurk ja N lõigu BC keskpunkt. Olgu $\angle AND = 135^\circ$. Tõesta, et $|AB| + |CD| + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |BC| \geqslant |AD|$.

9. On antud romb $ABCD$. Leia rombi sisepiirkonna kõigi selliste punktide P hulk, mille korral $\angle APD + \angle BPC = 180^\circ$.

10. Kolmnurga ABC nurga BAC poolitaja lõikab külge BC punktis D. Teades, et $|BD| \cdot |CD| = |AD|^2$ ja $\angle ADB = 45^\circ$, leia kolmnurga ABC nurkade suurused.

11. Reaalarvuliste väärtustega funktsioon f on defineeritud kõigil positiivsetel täisarvudel. Mistahes täisarvude $a > 1,\ b > 1$ korral kehtib

$$f(ab) = f(d) \cdot \left(f\left(\frac{a}{d}\right) + f\left(\frac{b}{d}\right) \right) ,$$

kus $d = \text{SÜT}\,(a,\, b)$. Leia avaldise $f(2001)$ kõik võimalikud väärtused.

12. Olgu $a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n$ sellised positiivsed reaalarvud, et $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^3 = 3$ ja $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^5 = 5$. Tõesta, et $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i > \dfrac{3}{2}$.

13. Olgu $a_0,\, a_1,\, a_2,\, \ldots$ reaalarvude jada, kus $a_0 = 1$ ja $a_n = a_{[7n/9]} + a_{[n/9]}$ iga $n = 1, 2, \ldots$ korral. Tõesta, et mingi positiivse täisarvu k korral kehtib $a_k < \dfrac{k}{2001!}$.

    (Siin $[x]$ tähistab suurimat täisarvu, mis pole suurem kui x.)

14. On antud $2n$ kaarti. Igale kaardile kirjutatakse reaalarv x, kus $1 \leqslant x \leqslant 2$ (erinevatel kaartidel võivad olla erinevad arvud). Tõesta, et kaardid saab jagada kahte pakki arvude summadega s_1 ja s_2, nii et $\dfrac{n}{n+1} \leqslant \dfrac{s_1}{s_2} \leqslant 1$.

15. Olgu $a_0,\, a_1,\, a_2,\, \ldots$ positiivsete reaalarvude jada, kus $i \cdot a_i^2 \geqslant (i+1) \cdot a_{i-1} a_{i+1}$ iga $i = 1, 2, \ldots$ korral. Olgu x ja y positiivsed reaalarvud ning $b_i = x a_i + y a_{i-1}$ iga $i = 1, 2, \ldots$ korral. Tõesta, et võrratus $i \cdot b_i^2 > (i+1) \cdot b_{i-1} b_{i+1}$ kehtib kõigi täisarvude $i \geqslant 2$ korral.

16. Olgu f positiivsetel täisarvudel määratud reaalarvuliste väärtustega funktsioon, mis rahuldab järgmist tingimust: igal arvul $n > 1$ leidub selline algtegur p, et

$$f(n) = f\left(\frac{n}{p}\right) - f(p) .$$

Leia avaldise $f(2002)$ väärtus, kui $f(2001) = 1$.

17. Olgu n positiivne täisarv. Tõesta, et hulgast $\{1,\, 2,\, 3,\, \ldots,\, 2^n\}$ saab valida vähemalt $2^{n-1} + n$ arvu, nii et ühegi kahe erineva valitud arvu x ja y korral pole $x + y$ arvu $x \cdot y$ jagaja.

18. Olgu a paaritu täisarv. Tõesta, et arvud $a^{2^n} + 2^{2^n}$ ja $a^{2^m} + 2^{2^m}$ on ühistegurita mistahes positiivsete täisarvude n ja m korral, kus $n \neq m$.

19. Milline on vähim positiivne paaritu täisarv, millel on samapalju positiivseid jagajaid kui arvul 360?

20. Täisarvude järjendist $(a,\, b,\, c,\, d)$ võib ühe sammuga saada ühe järjenditest

$$(c,\, d,\, a,\, b), \quad (b,\, a,\, d,\, c), \quad (a{+}nc,\, b{+}nd,\, c,\, d), \quad (a{+}nb,\, b,\, c{+}nd,\, d) ,$$

kus n on suvaline täisarv. Kas järjendist $(1,\, 2,\, 3,\, 4)$ on selliste sammude abil võimalik saada järjendit $(3,\, 4,\, 5,\, 7)$?

Ülesannete lahendused

1. *Vastus:* 8.

   Oletame, et mingi ülesanne anti vähemalt 4-le õpilasele. Siis igaüks neist pidi saama veel 2 ülesannet ja need ülesanded pidid olema kõik erinevad — seega oleks erinevaid ülesandeid pidanud olema vähemalt 9. Niisiis anti iga ülesanne ülimalt 3-le õpilasele ning kõigile õpilastele kokku võidi seega anda ülimalt $3 \cdot 8 = 24$ ülesannet. Et iga õpilane sai 3 ülesannet, ei saa õpilasi olla rohkem kui 8.

   Tähistades ülesanded A, B, C, D, E, F, G ja H, on tingimustele vastavaks ülesannete jaotuseks 8-le õpilasele näiteks ABC, ADE, AFG, BDG, BFH, CDH, CEF, EGH.

2. *Vastus:* jah.

   Sisaldagu alamhulk A_1 kõik need positiivsed täisarvud, mille kõik ülejäänud numbrid peale lõpust lugedes positsioonides 1, $(n+1)$, $(2n+1)$, ... olevate numbrite on nullid; alamhulk A_2 sisaldagu kõik need positiivsed täisarvud, mille kõik ülejäänud numbrid peale lõpust lugedes positsioonides 2, $(n+2)$, $(2n+2)$, ... olevate numbrite on nullid, jne. Siis A_1, A_2, ..., A_n on ülesande tingimustele vastavad alamhulgad.

3. *Vastus:* ei.

   Et tabeli iga rea ja iga veeru summa esineb kas A või B koosseisus ning iga tabelisse kirjutatud arv esineb täpselt ühes rea- ja ühes veerusummas, siis

   $$A + B = 2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 49) = 2 \cdot 25 \cdot 49 .$$

   Niisiis $A + B$ ei jagu 4-ga ning kui $A = B$, siis peaks B olema paaritu arv, mis pole võimalik.

4. Sirge $y = \frac{p}{q}x$ sisaldab sellise ristküliku diagonaali, mille tippude koordinaadid on $(0,0)$, $(0,p)$, $(q,0)$ ja (q,p), ning ei läbi ühtegi selle ristküliku sisepiirkonnas olevat täisarvuliste koordinaatidega punkti. Iga $k = 1, 2, \ldots, q-1$ korral esitab liidetav $\left[\frac{kp}{q}\right]$ selliste täisarvuliste koordinaatidega punktide arvu vaadeldavas ristkülikus, mille x-koordinaat on k ning mis paiknevad allpool sirget $y = \frac{p}{q}x$. Et ristküliku tippude koordinaadid on täisarvud, siis allpool ja ülalpool diagonaali on ristkülikus ühepalju täisarvuliste koordinaatidega punkte ning ülesandes antud summa esitab seega poolt selle ristküliku sisepiirkonnas olevate täisarvuliste koordinaatidega punktide koguarvust, mis on $(p-1)(q-1)$.

5. *Vastus:* ei.

   Nummerdame vaadeldavad punktid nende ringjoonel paiknemise järjekorras naturaalarvudega 1, 2, ..., 2001. Ütleme, et k punkti moodustavad *ühevärvilise lõigu*, kui nad on ringjoonel järjest ja kõik ühte värvi. Tähistagu $d(F)$ pikima ühevärvilise lõigu pikkust värvimise F korral. Paneme tähele, et $d(F_n) > 1$ iga n korral, sest punktide arv 2001 on paaritu. Kui $d(F_1) = 2001$, siis on kõik punktid ühte värvi ning $F_1 = F_2 = F_3 = \ldots$, mistõttu võime võtta $n_0 = 1$. Jääb üle vaadelda juhtu, kui $1 < d(F_1) < 2001$. Näitame, et värvimistel F_n on järgmised omadused:

$$\text{Kui } 3 < d(F_n) < 2001, \text{ siis } d(F_{n+1}) = d(F_n) - 2\ ; \tag{1}$$

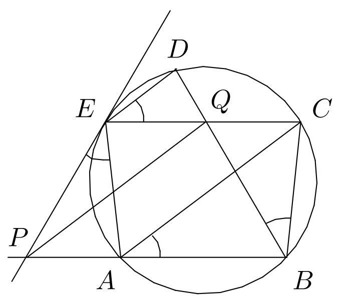
$$\text{Kui } d(F_n) = 3, \text{ siis } d(F_{n+1}) = 2\ ; \tag{2}$$

$$\text{Kui } d(F_n) = 2, \text{ siis } d(F_{n+1}) = d(F_n) \text{ ja } F_{n+2} = F_n\ ; \tag{3}$$

Omadustest (1) ja (2) järeldub, et $d(F_{1000}) \leqslant 2$, mistõttu vastavalt omadusele (3) on $F_{1000} = F_{1002}$. Samuti järeldub siit, et kui värvimisel F_1 on üks tipp punane ja kõik ülejäänud tipud rohelised, siis $d(F_1) = 2000$ ning $d(F_1) > d(F_2) > \ldots > d(F_{1000}) = 2$, mis näitab, et arvu 1000 ei saa asendada arvuga 999.

Tõestame nüüd omadused (1)–(3). Olgu $(i+1, \ldots, i+k)$ pikim ühevärviline lõik värvimise F_n korral (punktide numbreid vaatleme siin ja edaspidi *modulo* 2001). Siis $(i+2, \ldots, i+k-1)$ on ühevärviline lõik värvimise F_{n+1} korral, mistõttu $d(F_{n+1}) \geqslant d(F_n) - 2$. Teisalt: kui $(i+1, \ldots, i+k)$ on pikim ühevärviline lõik värvimise F_{n+1} korral ja $k \geqslant 3$, siis $(i, \ldots, i+k+1)$ on ühevärviline lõik värvimise F_n korral. Siit ja sellest, et $F_{n+1} > 1$, järelduvad omadused (1) ja (2). Omadus (3) järeldub otseselt sellest, et $d(F_n) \leqslant 2$ korral saadakse värvimine F_{n+1} värvimisest F_n kõikide punktide värvi muutmisel.

6. Et $ABCE$ on võrdhaarne trapets alustega AB ja CE, siis $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AE}$ (vt. joonist 1). Et $AB \parallel CE$ ning $AC \parallel DE$, siis $\angle CAB = \angle DEC$ ning $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BC}$. Seega AE ja CD on võrdse pikkusega kõõlud ning $\angle PEA = \angle DBC = \angle QBC$ (nurk kõõlu ja selle otspunktis ringjoonele tõmmatud puutuja vahel on võrdne sellele kõõlule toetuva piirdenurgaga). Et ka $\angle QCB = 180° - \angle BAE = \angle PAE$ ning $|CB| = |AE|$, siis kolmnurgad QCB ja PAE on kongruentsed ning $|QC| = |AP|$, mistõttu nelinurk $PQCA$ on rööpkülik ja $|AC| = |PQ|$.



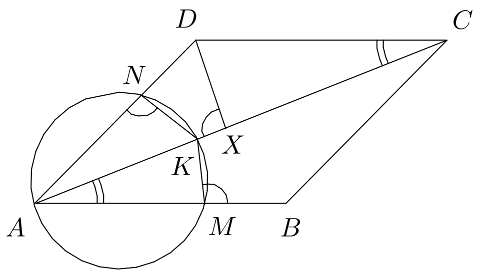
Joonis 1

7. Olgu X selline punkt lõigul AC, et $\angle ADX = \angle AKN$, siis

$$\angle AXD = \angle ANK = 180° - \angle AMK$$

(vt. joonist 2). Kolmnurgad NAK ja XAD on sarnased, sest neil on kaks paari võrdseid nurki, mistõttu $|AX| = \dfrac{|AN| \cdot |AD|}{|AK|}$. Samuti on sarnased kolmnurgad MAK ja XCD, mistõttu $|CX| = \dfrac{|AM| \cdot |CD|}{|AK|} = \dfrac{|AM| \cdot |AB|}{|AK|}$. Seega

$$|AM| \cdot |AB| + |AN| \cdot |AD| = (|AX| + |CX|) \cdot |AK| = |AC| \cdot |AK| .$$



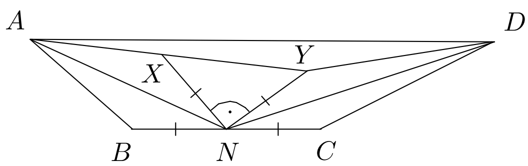
Joonis 2

8. Olgu X punkt, mis on sümmeetriline punktiga B sirge AN suhtes, ning Y punkt, mis on sümmeetriline punktiga C sirge DN suhtes (vt. joonist 3). Siis

$$\angle XNY = 180^\circ - 2 \cdot (180^\circ - 135^\circ) = 90^\circ$$

ning $|NX| = |NY| = \dfrac{|BC|}{2}$, kust $|XY| = \dfrac{|BC|}{\sqrt{2}}$. Et $|AX| = |AB|$ ja $|DY| = |DC|$, siis

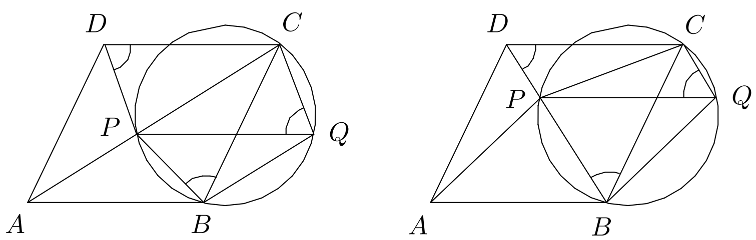
$$|AD| \leqslant |AX| + |XY| + |YD| = |AB| + \frac{|BC|}{\sqrt{2}} + |DC| .$$



Joonis 3

9. *Vastus:* punktid, mis paiknevad rombi diagonaalidel.

   Olgu Q selline punkt, et $PQCD$ on rööpkülik (vt. joonist 4), siis $ABQP$ on samuti rööpkülik ning $\angle BQC = \angle APD$. Seega $\angle BQC + \angle BPC = 180^\circ$, s.t. $BQCP$ on kõõlnelinurk ning $\angle PBC = \angle PQC = \angle PDC$. Et $|DC| = |BC|$, siis peab kas punkt P paiknema rombi diagonaalil BD või kehtima võrdus $\angle DPC = \angle BPC$ (sel juhul punkt C paikneb rombi diagonaalil AC).

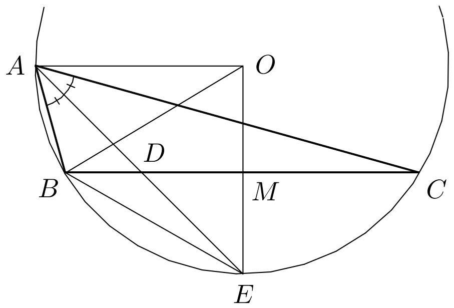


Joonis 4

Teisest küljest on ilmne, et diagonaali AC mistahes punkti P korral kehtib võrdus $\angle BPC = \angle DPC$, mistõttu $\angle APD + \angle BPC = 180^\circ$. Analoogiliselt näitame, et ka diagonaali BD mistahes punkt rahuldab ülesande tingimust.

10. *Vastus:* $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ABC = 105^\circ$ ja $\angle ACB = 15^\circ$.

Lõigaku sirge AD kolmnurga ABC ümberringjoont teistkordselt punktis E (vt. joonist 5). Olgu M külje BC keskpunkt ja O kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt, siis punktid O, M ja E paiknevad ühel sirgel (sest $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{EC}$) ning seega $OE \perp BC$. Võrdusest $\angle EDM = \angle ADB = 45^\circ$ saame nüüd, et $\angle AEO = 45^\circ$. Et $|AO| = |EO|$, siis $\angle AOE = 90^\circ$, ehk $AO \parallel DM$.



Joonis 5

Võrdusest $|BD| \cdot |CD| = |AD|^2$ saame $|AD| = |AE|$, mistõttu ka $|OM| = |ME|$ ning $|BO| = |BE|$. Et ka $|BO| = |EO|$, siis kolmnurk BOE on võrdkülgne ja $\angle BOE = 60^\circ$, kust $\angle BAE = 30^\circ$ ja $\angle BAC = 60^\circ$. Kolmnurgast ABD saame $\angle ABC = \angle ABD = 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 105^\circ$ ning järelikult $\angle ACB = 15^\circ$.

11. *Vastus:* 0 ja $\dfrac{1}{2}$.

Konstantsed funktsioonid $f(x) = 0$ ja $f(x) = \dfrac{1}{2}$ rahuldavad ilmselt ülesande tingimusi.

Näitame, et $f(2001)$ ei saa omada muid väärtusi peale 0 ja $\dfrac{1}{2}$.

Olgu $f(2001) \neq 0$. Et $2001 = 3 \cdot 667$ ja $\text{SÜT}\,(3, 667) = 1$, siis

$$f(2001) = f(1) \cdot (f(3) + f(667)) ,$$

kust $f(1) \neq 0$, ning kuna $\text{SÜT}\,(2001, 2001) = 2001$, siis

$$f(2001^2) = f(2001)(2 \cdot f(1)) \neq 0 .$$

Et $\text{SÜT}\,(2001, 2001^3) = 2001$, siis

$$f(2001^4) = f(2001) \cdot (f(1) + f(2001^2)) = f(1)f(2001)(1 + 2f(2001)) .$$

Teisalt aga $\text{SÜT}\,(2001^2, 2001^2) = 2001^2$ ning

$$f(2001^4) = f(2001^2) \cdot (f(1) + f(1)) = 2f(1)f(2001^2) = 4f(1)^2 f(2001) ,$$

mistõttu $4f(1) = 1 + 2f(2001)$ ning $f(2001) = 2f(1) - \frac{1}{2}$. Rakendades täpselt analoogilist arutlust $f(2001)$ asemel $f(2001)^2$ jaoks saame $f(2001^2) = 2f(1) - \frac{1}{2}$. Niisiis

$$2f(1) - \frac{1}{2} = 2f(1)\Big(2f(1) - \frac{1}{2}\Big)\,,$$

kust $4f(1)^2 - 3f(1) + \frac{1}{2} = 0$. Ruutvõrrandi $4x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0$ lahenditeks on $\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{4}$ ning et $f(2001) = 2f(1) - \frac{1}{2} \neq 0$ tõttu $f(1) \neq \frac{1}{4}$, siis peab olema $f(1) = \frac{1}{2}$ ja $f(2001) = 2f(1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

12. Hölderi võrratusest saame, et

$$\sum_{i=1}^{n} a^3 = \sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot a_i^2) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{5/3}\right)^{3/5} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i^2)^{5/2}\right)^{2/5}.$$

Näitame nüüd, et

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{5/3} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{5/3}. \tag{4}$$

Olgu $S = \sum_{i=1}^{n} a_i$, siis võrratus (4) on samaväärne võrratusega

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{a_i}{S}\Big)^{5/3} \leqslant 1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{S}\,,$$

mis kehtib, kuna $0 < \frac{a_i}{S} \leqslant 1$ ja $\frac{5}{3} > 1$, mistõttu $\Big(\frac{a_i}{S}\Big)^{5/3} \leqslant \frac{a_i}{S}$. Niisiis

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^3 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^5\right)^{2/5},$$

kust $\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant \frac{3}{5^{2/5}} > \frac{3}{2}$, sest $2^5 > 5^2$ ja seega $2 > 5^{2/5}$.

13. Paneme tähele, et võrrandil

$$\Big(\frac{7}{9}\Big)^x + \Big(\frac{1}{9}\Big)^x = 1$$

on selline lahend α, et $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, sest $\sqrt{\frac{7}{9}} + \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{7}+1}{3} > 1$ ning $\frac{7}{9} + \frac{1}{9} < 1$.

Näitame nüüd, et $a_n \leqslant M \cdot n^\alpha$ mingi $M > 0$ korral: et $\dfrac{n^\alpha}{n}$ läheneb n kasvades nullile, siis järeldub sellest ülesande väide. Valime M nii, et see võrratus kehtib $1 \leqslant n \leqslant 8$ korral; kuna $n \geqslant 9$ korral on $1 < [7n/9] < n$ ja $1 \leqslant [n/9] < n$, siis induktsiooniga saame

$$\begin{aligned} a_n &= a_{[7n/9]} + a_{[n/9]} \leqslant M \cdot \left[\frac{7n}{9}\right]^\alpha + M \cdot \left[\frac{n}{9}\right]^\alpha \leqslant \\ &\leqslant M \cdot \left(\frac{7n}{9}\right)^\alpha + M \cdot \left(\frac{n}{9}\right)^\alpha = M \cdot n^\alpha \cdot \left(\left(\frac{7}{9}\right)^\alpha + \left(\frac{1}{9}\right)^\alpha\right) = M \cdot n^\alpha . \end{aligned}$$

14. Olgu kaartidele kirjutatud arvud $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{2n-1} \leqslant x_{2n}$. Näitame, et $s_1 = x_1 + x_3 + x_5 + \ldots + x_{2n-1}$ ja $s_2 = x_2 + x_4 + x_6 + \ldots + x_{2n}$ rahuldavad ülesande tingimusi. Tõepoolest, võrratus $\dfrac{s_1}{s_2} \leqslant 1$ on ilmne ning

$$\begin{aligned} \frac{s_1}{s_2} &= \frac{x_1 + x_3 + x_5 + \ldots + x_{2n-1}}{x_2 + x_4 + x_6 + \ldots + x_{2n}} = \frac{(x_3 + x_5 + \ldots + x_{2n-1}) + x_1}{(x_2 + x_4 + \ldots + x_{2n-2}) + x_{2n}} \geqslant \\ &\geqslant \frac{(x_3 + x_5 + \ldots + x_{2n-1}) + 1}{(x_2 + x_4 + \ldots + x_{2n-2}) + 2} \geqslant \frac{(x_2 + x_4 + \ldots + x_{2n-2}) + 1}{(x_2 + x_4 + \ldots + x_{2n-2}) + 2} = \\ &= 1 - \frac{1}{(x_2 + x_4 + \ldots + x_{2n-2}) + 2} \geqslant 1 - \frac{1}{(n-1) + 2} = \frac{n}{n+1} . \end{aligned}$$

15. Olgu $i \geqslant 2$, siis

$$(i-1) \cdot a_{i-1}^2 \geqslant i \cdot a_i a_{i-2} \tag{5}$$

ning

$$i \cdot a_i^2 \geqslant (i+1) \cdot a_{i+1} a_{i-1} . \tag{6}$$

Korrutades võrduse (6) pooli teguriga x^2 saame

$$i \cdot x^2 \cdot a_i^2 \geqslant (i+1) \cdot x^2 \cdot a_{i+1} a_{i-1} . \tag{7}$$

Võrdusest (5) saame

$$\frac{a_{i-1}^2}{a_i a_{i-2}} \geqslant \frac{i}{i-1} = 1 + \frac{1}{i-1} > 1 + \frac{1}{i} = \frac{i+1}{i} ,$$

kust

$$i \cdot y^2 \cdot a_{i-1}^2 > (i+1) \cdot y^2 \cdot a_i a_{i-2} . \tag{8}$$

Korrutades võrduste (5) ja (6) vastavad pooled ning jagades saadud võrratuse pooli avaldisega $i a_i a_{i-1}$, saame

$$(i-1) \cdot a_i a_{i-1} \geqslant (i+1) \cdot a_{i+1} a_{i-2} .$$

Liites selle võrratuse mõlemale poole $(i+1)a_i a_{i-1}$ ja korrutades saadud võrratuse pooli teguriga xy saame

$$i \cdot 2xy \cdot a_i a_{i-1} \geqslant (i+1) \cdot xy \cdot (a_{i+1}a_{i-2} + a_i a_{i-1}) . \tag{9}$$

Võrratuste (7), (8) ja (9) vastavate poolte liitmine annab nüüd

$$i \cdot (xa_i + ya_{i-1})^2 > (i+1) \cdot (xa_{i+1} + ya_i)(xa_{i-1} + ya_{i-2}) ,$$

mis on samaväärne tõestatava võrratusega.

16. *Vastus:* 2.
Mistahes algarvu p korral peab vastavalt ülesande tingimusele olema $f(p) = f(1) - f(p)$ (sest p ainus algarvuline tegur on ta ise), kust $f(p) = \dfrac{f(1)}{2}$. Mistahes kahe algarvu korrutisena avalduva arvu $n = pq$ korral on $f(n) = f(p) - f(q)$ või $f(n) = f(q) - f(p)$, s.t. igal juhul $f(n) = 0$. Olgu nüüd n kolme algarvu korrutis, siis

$$f(n) = f\Big(\frac{n}{p}\Big) - f(p) = -f(p) = -\frac{f(1)}{2} .$$

Induktsiooniga saame kergesti näidata, et kui n esitub k algarvu korrutisena, siis $f(n) = (2-k) \cdot \dfrac{f(1)}{2}$. Et $f(2001) = f(3 \cdot 23 \cdot 29) = 1$, siis $f(1) = -2$ ning $f(2002) = f(2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13) = -f(1) = 2$.

17. Valime arvud $1, 3, 5, \ldots, 2^n - 1$ ja $2, 4, 8, 16, \ldots, 2^n$, s.t. kõik paaritud arvud ja kõik arvu 2 astmed. Vaatleme kolme võimalikku juhtu.
(1) Kui $x = 2a - 1$ ja $y = 2b - 1$, siis $x + y = (2a-1) + (2b-1) = 2(a+b-1)$ on paarisarv ega ole paaritu arvu $xy = (2a-1)(2b-1)$ jagaja.
(2) Kui $x = 2^k$ ja $y = 2^m$, kus $k < m$, siis $x + y = 2^k(2^{m-k} + 1)$ sisaldab paaritut tegurit ega ole seetõttu arvu $xy = 2^{a+b}$ jagaja.
(3) Kui $x = 2^k$ ja $y = 2b - 1$, siis paaritu arv $x + y = 2^a + (2b-1) > (2b-1)$ ei ole arvu $xy = 2^a(2b-1)$ jagaja, sest selle arvu suurim paaritu tegur on $2b - 1$.

18. Olgu $n > m$. Kirjutades $a^{2^n} + 2^{2^n} = a^{2^n} - 2^{2^n} + 2 \cdot 2^{2^n}$ ning kasutades korduvalt seost

$$a^{2^n} - 2^{2^n} = (a^{2^{n-1}} - 2^{2^{n-1}}) \cdot (a^{2^{n-1}} + 2^{2^{n-1}})$$

saame:

$$\begin{aligned} a^{2^n} + 2^{2^n} &= (a^{2^{n-1}} + 2^{2^{n-1}}) \cdot (a^{2^{n-2}} + 2^{2^{n-2}}) \cdot \ldots \cdot (a^{2^m} + 2^{2^m}) \cdot \ldots \\ &\qquad \ldots \cdot (a^2 + 2^2) \cdot (a+2) \cdot (a-2) + 2 \cdot 2^{2^n} . \end{aligned}$$

Arvude $a^{2^n} + 2^{2^n}$ ja $a^{2^m} + 2^{2^m}$ mistahes ühine tegur d jagab niisiis arvu $2 \cdot 2^{2^n}$ ning on seega kujul $d = 2^k$. Et a on paaritu arv, siis m ja n on samuti paaritud arvud ning järelikult $k = 0$, s.t. $d = 1$.

19. *Vastus:* 31185.

Arvul $n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{r_k}$, kus $p_1, p_2, \ldots, p_k$ on erinevad algarvud, on täpselt $(p_1 + 1) \cdot (p_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (p_k + 1)$ erinevat positiivset jagajat. Arvul $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ on seega $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ jagajat ning kuna $24 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, siis on lihtne veenduda, et vähim sellise jagajate arvuga paaritu arv on $3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 31185$.

20. *Vastus:* ei.

Kõikide ülesandes kirjeldatud teisenduste $(a, b, c, d) \to (a', b', c', d')$ korral kehtib võrdus $ad - bc = a'd' - b'c'$, kuid $1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 2 \neq 1 = 3 \cdot 7 - 4 \cdot 5$.