Matemaatikaolümpiaad “Balti tee 2000”

Oslos, 4. novembril 2000

1. Olgu K kolmnurga ABC sisepunkt. Olgu M ja N sellised punktid, et M ja K asuvad sirgest AB erineval pool ning N ja K asuvad sirgest BC erineval pool, kusjuures

   $$\angle MAB = \angle MBA = \angle NBC = \angle NCB = \angle KAC = \angle KCA\,.$$

   Tõesta, et $MBNK$ on rööpkülik.

2. Olgu ABC võrdhaarne kolmnurk, kus $\angle A = 90^\circ$. Olgu M lõigu AB keskpunkt. Lõigule CM läbi punkti A tõmmatud ristsirge lõikab külge BC punktis P. Tõesta, et

   $$\angle AMC = \angle BMP\,.$$

3. Kolmnurgas ABC on $\angle A = 90^\circ$ ja $|AB| \neq |AC|$. Punktid D, E ja F paiknevad vastavalt külgedel BC, CA ja AB nii, et nelinurk $AFDE$ on ruut. Tõesta, et sirged BC ja FE ning kolmnurga ABC ümberringjoonele punktis A tõmmatud puutuja lõikuvad ühes punktis.

4. Kolmnurgas ABC on $\angle A = 120^\circ$. Punktid K ja L asuvad vastavalt külgedel AB ja AC. Olgu BKP ja CLQ kolmnurgast ABC väljapoole konstrueeritud võrdkülgsed kolmnurgad. Tõesta, et

   $$|PQ| \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (|AB| + |AC|)\,.$$

5. Olgu ABC kolmnurk, milles $\dfrac{|BC|}{|AB| - |BC|} = \dfrac{|AB| + |BC|}{|AC|}$. Leia suhe $\angle A : \angle C$.

6. Fredek peab eravõõrastemaja. Ta väidab, et alati, kui tal on majas $n \geqslant 3$ külastajat, on nende hulgast võimalik valida kaks sellist, kellel on ülejäänud külastajate seas ühepalju tuttavaid ning kellel lisaks sellele on ülejäänud külastajate hulgas ka ühine tuttav või ühine mittetuttav. Milliste n väärtuste korral on Fredekil õigus?

   (Eeldame, et kui A on B tuttav, siis ka B on A tuttav.)

7. Nuppudest koosneva 40×50 paneeli igal nupul on kaks võimalikku olekut: ON ja OFF. Mistahes nupu vajutamisel muutub nii selle nupu kui ka kõikide temaga samas reas ja samas veerus olevate nuppude olek. Tõesta, et kui paneeli kõik nupud on esialgu olekus OFF, siis on mingi arvu järjestikuste vajutuste abil võimalik viia kõik nupud olekusse ON, ning leia selleks vajaminevate vajutuste vähim arv.

8. Neliteist sõpra kohtusid peol. Üks neist, Fredek, tahtis varakult magama minna. Ta soovis head ööd 10 sõbrale, unustades ülejäänud 3, ja läks magama. Veidi aja pärast pöördus ta peole tagasi, soovis jälle head ööd 10 sõbrale (mitte tingimata neilesamadele, kellele esimesel korral) ning läks tagasi magama. Nii toimis ta korduvalt, soovides iga kord head ööd täpselt 10 sõbrale ja minnes siis tagasi magama. Kui Fredek oli igale sõbrale vähemalt korra head ööd soovinud, ta enam peole tagasi ei tulnud. Hommikul taipas Fredek, et ta oli igale sõbrale erineva arvu kordi head ööd soovinud. Vähemalt kui mitu korda pöördus Fredek peole tagasi?

9. Ühikruutudest koosneval $2k \times 2k$ laual hüppab konn. Konna iga hüppe pikkus on $\sqrt{1+k^2}$ ja igal hüppel liigub ta mingi ühikruudu keskpunktist mingi teise ühikruudu keskpunkti. Laual märgitakse mingid m ruutu ristiga ning kõik need ruudud, kuhu konn saab hüpata mõnelt ristiga märgitud ruudult, märgitakse ringiga (ka siis, kui mõni neist on juba ristiga märgitud). Ringiga märgitud ruute on n. Tõesta, et $n \geqslant m$.

10. Tahvlile kirjutatakse kaks positiivset täisarvu. Algul on üks neist 2000 ja teine väiksem kui 2000. Kui tahvlil oleva kahe arvu aritmeetiline keskmine m on täisarv, võime teha järgmise operatsiooni: kustutame ühe neist arvudest ja kirjutame selle asemele arvu m. Tõesta, et seda operatsiooni ei saa teha rohkem kui 10 korda. Too näide, kus seda operatsiooni tehakse 10 korda.

11. Olgu positiivsete täisarvude jada $a_1, a_2, \ldots$ selline, et iga m ja n korral kehtib tingimus: kui m on n jagaja ning $m < n$, siis a_m on a_n jagaja ning $a_m < a_n$. Leia a_{2000} vähim võimalik väärtus.

12. Olgu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sellised positiivsed täisarvud, millest ükski ei ole ühegi teise algusosaks (nt. arv 12 on arvude $\underline{12}$, $\underline{12}5$ ja $\underline{12}405$ algusosaks). Tõesta, et

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} < 3 .$$

13. Olgu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sellise täisarvudest koosneva aritmeetilise jada esimesed liikmed, et i on a_i jagaja iga $i = 1, 2, \ldots, n-1$ korral ning n ei ole a_n jagaja. Tõesta, et n on mingi algarvu aste.

14. Leia kõik sellised positiivsed täisarvud n, et n on täpselt 100 korda suurem oma positiivsete jagajate arvust.

15. Olgu n positiivne täisarv, mis ei jagu arvudega 2 ja 3. Tõesta, et iga täisarvu k korral jagub arv $(k+1)^n - k^n - 1$ arvuga $k^2 + k + 1$.

16. Tõesta, et mistahes positiivsete reaalarvude a, b ja c korral kehtib võrratus

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geqslant \sqrt{a^2 + ac + c^2} .$$

17. Leia võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + y + z + t = 5 \\ xy + yz + zt + tx = 4 \\ xyz + yzt + ztx + txy = 3 \\ xyzt = -1 \end{cases}$$

kõik reaalarvulised lahendid.

18. Leia kõik positiivsete reaalarvude paarid (x, y), mille korral kehtib võrdus

$$x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 4 = 2 \cdot (\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1}) .$$

19. Olgu $t \geqslant \dfrac{1}{2}$ reaalarv ja n positiivne täisarv. Tõesta, et

$$t^{2n} \geqslant (1-t)^{2n} + (2t-1)^n \,.$$

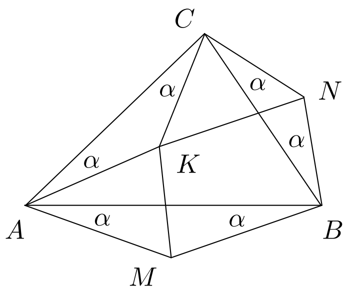
20. Iga positiivse täisarvu n korral olgu

$$x_n = \frac{(2n+1)\cdot(2n+3)\cdot\ldots\cdot(4n-1)\cdot(4n+1)}{2n\cdot(2n+2)\cdot\ldots\cdot(4n-2)\cdot 4n} \,.$$

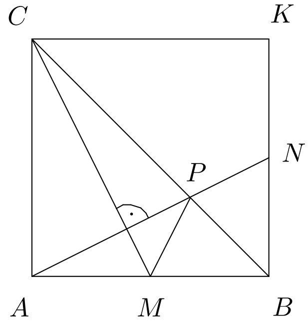
Tõesta, et $\dfrac{1}{4n} < x_n - \sqrt{2} < \dfrac{2}{n}$.

Ülesannete lahendused

1. Tähistame $\angle MAB = \angle MBA = \ldots = \alpha$. Siis $\angle MAK = \alpha + (\angle BAC - \alpha) = \angle BAC$, $\dfrac{|AM|}{|AB|} = \dfrac{1}{2\cos\alpha}$ ja $\dfrac{|AK|}{|AC|} = \dfrac{1}{2\cos\alpha}$ (vt. joonist 1). Seega on kolmnurgad MAK ja BAC sarnased ning $|MK| = \dfrac{|BC|}{2\cos\alpha}$. Et aga ka $|BN| = \dfrac{|BC|}{2\cos\alpha}$, siis $|MK| = |BN|$. Analoogiliselt leiame $|BM| = |NK|$, millest saame nõutava järelduse.



Joonis 1



Joonis 2

2. Valime punkti K nii, et $ABKC$ on ruut. Olgu N sirgete AP ja KB lõikepunkt (vt. joonist 2). Et lõigud AN ja CM on risti, on kolmnurgad AMC ja BNA saadavad teineteisest pöördel 90° võrra ja seega kongruentsed ning

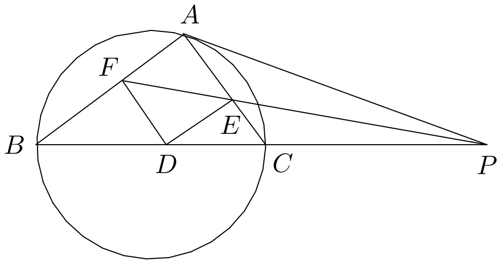
$$\angle AMC = \angle BNA\,. \tag{1}$$

Sellest, et $|BM| = |BN|$ ja $\angle MBP = \angle NBP$, järeldub nüüd, et kolmnurgad MBP ja NBP on kongruentsed. Seega

$$\angle BMP = \angle BNP\,. \tag{2}$$

Võrdustest (1) ja (2) saame vajaliku tulemuse.

3. Olgu P sirgete BC ja FE lõikepunkt (vt. joonist 3). Piisab näidata, et sirge AP on kolmnurga ABC ümberringjoone puutuja.

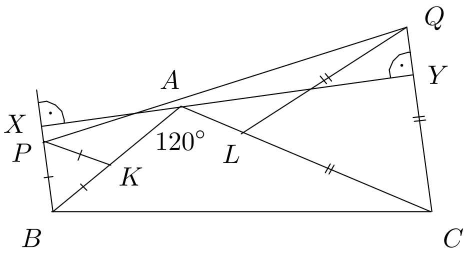


Joonis 3

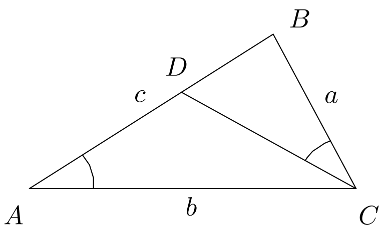
Et lõik FE on ruudu $AFDE$ sümmeetriatelg, siis $\angle APE = \angle BPF$ ning samuti $\angle AEP = 135^\circ = \angle BFP$. Ülaltoodud võrdustest järeldub, et kolmnurgad APE ja BPF on sarnased. Seega $\angle CAP = \angle ABC$, s.t. sirge AP on kolmnurga ABC ümberringjoone puutuja.

4. Et $\angle ABC + \angle ACB = 60^\circ$, on sirged BP ja CQ paralleelsed. Olgu X ja Y punktist A vastavalt sirgetele BP ja CQ tõmmatud ristlõikude aluspunktid (vt. joonist 4). Siis $|AX| = \frac{\sqrt{3}}{2}|AB|$ ja $|AY| = \frac{\sqrt{3}}{2}|AC|$. Et punktid X, A ja Y asuvad ühel sirgel, siis

$$|PQ| \geqslant |XY| = \frac{\sqrt{3}}{2}(|AB| + |AC|)\,.$$



Joonis 4



Joonis 5

5. *Vastus*: $\angle A : \angle C = 1 : 2$.

Tähistame $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$. Tingimusest $\frac{a}{c-a} = \frac{c+a}{b}$ järeldub, et $c^2 = a^2 + ab$ ning

$$\frac{c}{a+b} = \frac{a}{c}\,.$$

Olgu punkt D lõigul AB selline, et $BD = \frac{a}{a+b} \cdot c$ (vt. joonist 5). Siis

$$\frac{|BD|}{|BC|} = \frac{c}{a+b} = \frac{a}{c} = \frac{|BC|}{|BA|}\,,$$

seega on kolmnurgad BCD ja BAC sarnased ning $\angle BCD = \angle BAC$. Samas võrdusest $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BD|}$ saame $\frac{|BC|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|AD|}$ ning seega on CD nurga $\angle BCA$ poolitaja. Siit leiame nõutud suhte.

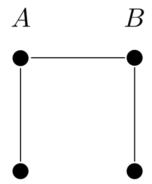
6. *Vastus*: Fredekil on õigus, kui $n \neq 4$.

Oletame, et igal kahel sama arvu tuttavatega külastajal ei ole ülejäänud külastajate hulgas ei sama tuttavat ega sama mittetuttavat. Valime külastajate hulgast $\mathcal{K}$ kaks külastajat A ja B, kellel on sama arv tuttavaid (selliste külastajate olemasolu saab tõestada Dirichlet' printsiibi abil). Et ülejäänud külaliste hulgas kõik A tuttavad peavad olema B mittetuttavad ja kõik A mittetuttavad peavad olema B tuttavad, siis on neil mõlemal hulgas $\mathcal{K}$ kas $\frac{1}{2}n$ või $\frac{1}{2}n-1$ tuttavat olenevalt sellest, kas A ja B on omavahel tuttavad või ei. Muuhulgas järeldub siit, et paarituarvulise n korral on Fredekil alati õigus.

Oletame nüüd, et n on paarisarv ja $n \geqslant 6$. Valime hulgast $\mathcal{K} \setminus \{A, B\}$ kaks külastajat C ja D, kellel on hulgas $\mathcal{K} \setminus \{A, B\}$ sama arv tuttavaid. Et iga külastaja hulgast $\mathcal{K} \setminus \{A, B\}$ on kas A või B tuttav, on C-l ja D-l sama arv tuttavaid hulgas $\mathcal{K}$, s.t. vastavalt eespool tõestatule on neil kas $\frac{1}{2}n$ või $\frac{1}{2}n - 1$ tuttavat hulgas $\mathcal{K}$.

Viimaks valime hulgast $\mathcal{K} \setminus \{A, B, C, D\}$ kaks külastajat E ja F, kellel on hulgas $\mathcal{K} \setminus \{A, B, C, D\}$ sama arv tuttavaid. Ka neil peab olema hulgas $\mathcal{K}$ sama arv tuttavaid: kas $\frac{1}{2}n$ või $\frac{1}{2}n - 1$. Seega on vähemalt neljal inimesel hulgast $\{A, B, C, D, E, F\}$ sama arv tuttavaid hulgas $\mathcal{K}$. Nende nelja hulgast saab Fredek alati leida külastaja, kellel on ülejäänute seas ühine tuttav või mittetuttav.

Kui $n = 4$, siis pole Fredekil õigus: sobiv kontranäide on joonisel 6.



Joonis 6

7. *Vastus*: vähim vajutuste arv on 2000.

   Et viia kõik nupud seisust OFF seisu ON, peab iga nupu olek muutuma paaritu arv kordi. Seda võib saavutada näiteks iga nuppu täpselt üks kord vajutades (siis muutub iga nupu olek 89 korda), seega on nõutavat seisu võimalik saavutada 2000 vajutustega. Näitame nüüd, et kui me mingile nupule kordagi ei vajuta, pole nõutud seisu võimalik saavutada. Selle nupu saamiseks olekusse ON peab selle nupuga samas reas olevaid nuppe ja selle nupuga samas veerus olevaid nuppe vajutama kokku paaritu arv kordi, seega kas selles reas või veerus olevaid nuppe tuleb vajutada paaritu arv kordi. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et mittevajutatava nupuga samas reas olevaid nuppe on vajutatud kokku paaritu arv kordi. Selleks, et selles reas olevatest teistest nuppudest (mida on paaritu arv) igaühe olek muutuks paaritu arv kordi, peab ülejäänud paneelil asuvaid nuppe vajutama kokku paarisarv kordi. Siis on aga mittevajutatava nupuga samas veerus olevaid nuppe mõjutavaid vajutusi paarisarv, aga kuna ka neid nuppe on paaritu arv, siis nende kõigi oleku vastupidiseks muutmiseks on vaja kokku paaritut arvu nupuvajutusi.

8. *Vastus*: Fredek pöördus peole tagasi vähemalt 32 korral.

   Oletame, et Fredek pöördus peole tagasi k korral, s.t. ta soovis sõpradele head ööd $k+1$ korda. Ühele sõpradest (olgu see X_{13}) unustas Fredek head ööd soovida k korda järjest, vastasel korral oleks Fredek pöördunud vähem kui k korda peole tagasi.

   Vaatleme Fredeki ülejäänud sõpru, olgu need $X_1, X_2, \ldots, X_{12}$. Oletame, et Fredek unustas sõbrale X_j head ööd soovida x_j korral. Et ta soovis head ööd igale sõbrale erinev arv kordi, siis võime üldisust kitsendamata eeldada, et $x_j \geqslant j - 1$ iga $j = 1, 2, \ldots, 12$

korral. Et Fredek unustas sõbra X_{13} k-l korral ning et ta iga kord unustas täpselt kolmele sõbrale head ööd soovida, siis

$$3(k+1) = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{12} + k \geqslant 1 + 2 + 3 + \ldots + 11 + k = 66 + k\,.$$

Siit $2k \geqslant 63$, millest $k \geqslant 32$.

Järgnev tabel näitab, et Fredek võis tagasi tulla 32 korral. Veergu i on kirjutatud nende sõprade numbrid, kellele Fredek unustas i. korral head ööd soovida.

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
13\ldots13 & 13 & 13\ldots13 & 13\ldots13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 11 \\
11\ldots11 & 11 & 8\ldots8 & 7\ldots7 & 7 & 4 & 4 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 \\
\underbrace{10\ldots10}_{10} & 9 & \underbrace{9\ldots9}_{8} & \underbrace{6\ldots6}_{6} & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 2 & 2 & 1
\end{array}$$

9. Tähistame laua ruudud arvupaaridega (i,j), kus $1 \leqslant i, j \leqslant 2k$. Olgu L kõigi nende arvupaaride hulk. Defineerime funktsiooni $f : L \to L$ järgmiselt:

$$f(i,j) = \begin{cases} (i+1, j+k), & \text{kui } i \text{ on paaritu ja } j \leqslant k, \\ (i-1, j+k), & \text{kui } i \text{ on paaris ja } j \leqslant k, \\ (i+1, j-k), & \text{kui } i \text{ on paaritu ja } j > k, \\ (i-1, j-k), & \text{kui } i \text{ on paaris ja } j > k. \end{cases}$$

On lihtne näha, et funktsioon f on üksühene. Sellest saame järeldada ülesandes nõutud võrratuse.

10. Ülesandes kirjeldatud operatsiooni tehes väheneb tahvlil oleva kahe arvu vahe täpselt kaks korda. Arvude aritmeetiline keskmine on täisarv parajasti siis, kui nende arvude vahe on paarisarv. Olgu esialgu tahvlil olnud arvud 2000 ja b, siis saab nimetatud operatsiooni teha n korda parajasti siis, kui $2000 - b = 2^n u$. Et $2^{11} > 2000$, siis $n \leqslant 10$. Valides teiseks arvuks 976, nii et $2000 - 976 = 1024 = 2^{10}$, saame operatsiooni teha täpselt 10 korda.

11. *Vastus*: a_{2000} vähim võimalik väärtus on 128.

Defineerides $a_1 = 1$ ning iga $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ korral $a_n = 2^{\alpha_1 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_k}$, saame ilmselt ülesande tingimusi rahuldava jada. Et $2000 = 2^4 \cdot 5^3$, siis $a_{2000} = 2^{4+3} = 128$.

Näitame nüüd, et a_{2000} ei saa olla väiksem kui 128. Paneme tähele, et võrratuste ahelas $1 < 5 < 25 < 125 < 250 < 500 < 1000 < 2000$ iga järgmine arv jagub eelmisega. Et $a_1 \geqslant 1$, siis

$$a_{2000} \geqslant 2 \cdot a_{1000} \geqslant 2^2 \cdot a_{500} \geqslant 2^3 \cdot a_{250} \geqslant \ldots \geqslant 2^7 \cdot a_1 \geqslant 2^7 = 128\,.$$

12. Olgu $\{y_1, \ldots, y_k\} \subset \{x_1, \ldots, x_n\}$ selliste arvude hulk, mille numbrite arv on maksimaalne ning mis erinevad teineteisest ainult viimase numbri poolest: $y_1 = \overline{y\alpha_1}$, $y_2 = \overline{y\alpha_2}$, $\ldots$, $y_k = \overline{y\alpha_k}$ (siin y on arvu algusosa ja α_i arvu viimane number). Siis

$$\frac{1}{y_1} + \ldots + \frac{1}{y_k} \leqslant \frac{1}{\overline{y0}} + \ldots + \frac{1}{\overline{y9}} < 10 \cdot \frac{1}{\overline{y0}} = \frac{1}{y}\,.$$

Asendame hulgas $\{x_1, \ldots, x_n\}$ arvud $y_1, y_2, \ldots, y_k$ üheainsa arvuga y. Nii saadaval hulgal on alles ülesande tekstis nimetatud omadus ning uuritav summa ei vähene. Samal viisil jätkates saame lõpuks

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} \leqslant \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{9} < 3\,.$$

13. Oletame, et $a_i = k + di$ iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral. Siis k jagub kõikide arvudega hulgast $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ ja ei jagu arvuga n. Olgu n esitatav kahe sellise arvu $a > 1$ ja $b > 1$ korrutisena, et $\mathrm{SÜT}\,(a, b) = 1$. Siis k jagub arvudega a ja b, kuid ei jagu arvuga $n = ab$ — vastuolu. Seega peab n olema mingi algarvu aste.

14. *Vastus*: ainus selline arv on 2000.

Tähistagu $d(n)$ arvu n positiivsete jagajate arvu ning $p \triangleright n$ algarvu p astendajat arvu n algteguriteks lahutuses ning olgu $\delta(n) = \dfrac{n}{d(n)}$. Meil on vaja leida arvud n, mille korral $\delta(n) = 100$. Näitame kõigepealt, et kui $m < n$ on n jagaja, siis $\delta(m) \leqslant \delta(n)$ ning võrdus kehtib siis ja ainult siis, kui m on paaritu ja $n = 2m$. Olgu kõigepealt $n = pm$, kus p on algarv. Kuna mistahes naturaalarvu N korral, mille erinevad algarvulised tegurid on $p_1, \ldots, p_s$, kehtib võrdus $d(N) = (1 + p_1 \triangleright N) \cdot \ldots \cdot (1 + p_s \triangleright N)$, siis

$$\frac{\delta(n)}{\delta(m)} = \frac{n}{m} \cdot \frac{d(m)}{d(n)} = p \cdot \frac{1 + p \triangleright m}{1 + p \triangleright n} = p \cdot \frac{p \triangleright n}{1 + p \triangleright n} \geqslant 2 \cdot \frac{1}{2} = 1,$$

ning seega $\delta(m) \leqslant \delta(n)$, kusjuures võrdus kehtib siis ja ainult siis, kui $p = 2$ and $p \triangleright n = 1$, s.t. m on paaritu ja $n = 2m$. Üldjuhul, kus $n = sm$, saame väite tõestada induktsiooniga arvu s algarvuliste tegurite arvu järgi — seejuures on ilmne, et võrdus mitte-algarvulise s korral kehtida ei saa.

Kehtigu nüüd arvu n jaoks võrdus $\delta(n) = 100$, s.t. $n = 100 \cdot d(n)$. Hindame algarvude astendajaid arvu n algteguriteks lahutuses, võttes arvesse, et n jagub arvuga $100 = 2^2 \cdot 5^2$.

(1) Kuna $\delta(2^7 \cdot 5^2) = \dfrac{2^5 \cdot 100}{8 \cdot 3} = \dfrac{3200}{24} > 100$, siis $2 \triangleright n \leqslant 6$.

(2) Kuna $\delta(2^2 \cdot 5^4) = \dfrac{5^2 \cdot 100}{3 \cdot 5} = \dfrac{2500}{15} > 100$, siis $5 \triangleright n \leqslant 3$.

(3) Kuna $\delta(2^2 \cdot 5^2 \cdot 3^4) = \dfrac{3^4 \cdot 100}{3 \cdot 3 \cdot 5} = \dfrac{8100}{45} > 100$, siis $3 \triangleright n \leqslant 3$.

(4) Mistahes algarvu $q > 5$ ja $k \geqslant 4$ korral

$$\begin{aligned}\delta(2^2 \cdot 5^2 \cdot q^k) &= \frac{2^2 \cdot 5^2 \cdot q^k}{d(2^2 \cdot 5^2 \cdot q^k)} = \frac{2^2 \cdot 5^2 \cdot q^k}{d(2^2 \cdot 5^2 \cdot 3^k)} > \frac{2^2 \cdot 5^2 \cdot 3^k}{d(2^2 \cdot 5^2 \cdot 3^k)} = \\ &= \delta(2^2 \cdot 5^2 \cdot 3^k) > 100.\end{aligned}$$

Seega $q \triangleright n \leqslant 3$.

(5) Kui algarv $q > 7$ oleks n jagajaks, siis jagaks q ka $d(n)$ ning seega $1 + p \triangleright n$ mingi algarvu p korral, mis pole võimalik, sest $p \triangleright n \leqslant 6$ iga p korral. Niisiis võib arvu n suurim algtegur olla 7.

(6) Kui 7 oleks n jagajaks, jagaks ta ka $d(n)$ ning seega $1+p \triangleright n$ mingi algarvu p korral. Vastavalt eespool tõestatule on see võimalik siis, kui $p=2$ ja $2 \triangleright n = 6$. Teisalt, kui $2 \triangleright n = 6$, siis 7 jagab $d(n)$ ja n. Niisiis arv n jagub 7-ga siis ja ainult siis, kui $2 \triangleright n = 6$. Kuna aga $\delta(2^6 \cdot 5^2 \cdot 7) = \dfrac{2^4 \cdot 7 \cdot 100}{7 \cdot 3 \cdot 2} = \dfrac{11200}{42} > 100$, ei saa need mõlemad tingimused üheaegselt täidetud olla. Seega n ei jagu 7-ga ja $2 \triangleright n \leqslant 5$.

(7) Kui $5 \triangleright n = 3$, siis 5 jagab $d(n)$ ning seega $1+p \triangleright n$ mingi algarvu p korral. See on võimalik, kui $p=2$ and $2 \triangleright n = 4$. Teisalt, kui $2 \triangleright n = 4$, siis 5 jagab $d(n)$, 5^3 jagab n ning $5 \triangleright n = 3$. Niisiis $5 \triangleright n = 3$ siis ja ainult siis, kui $2 \triangleright n = 4$. Et $\delta(2^4 \cdot 5^3) = \dfrac{2^2 \cdot 5 \cdot 100}{5 \cdot 4} = 100$, siis $n = 2^4 \cdot 5^3 = 2000$ rahuldab neid tingimusi, kuid kui $n \neq 2000$, siis järeldub tingimustest $2 \triangleright n = 4$ ja $5 \triangleright n = 3$, et $n = 2000s$ mingi $s > 2$ korral ning seega $\delta(n) > 100$.

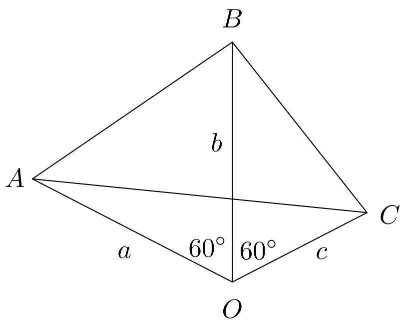
(8) Läbi vaadata on jäänud juht, kui $5 \triangleright n = 2$. Eelmises lõigus tõestatu põhjal siis $2 \triangleright n \neq 4$, s.t. $2 \triangleright n \in \{2,3,5\}$. Et $5 \triangleright n = 2$, siis 3 jagab $d(n)$ ja n ning seega $3 \triangleright n \in \{1,2,3\}$. Kui $2 \triangleright n = 3$, siis $d(n)$ jagub 2-ga, kuid mitte 4-ga ning samas $3+1=4$ jagab $d(n)$ — vastuolu. Seega $2 \triangleright n$ saab olla 2 või 5 ning 3^2 jagab $d(n)$ ja n, s.t. $3 \triangleright n$ on 2 või 3. Kui $3 \triangleright n = 2$, siis 3^3 jagaks $d(n)$ ja n, mis pole võimalik; kui aga $3 \triangleright n = 3$, siis $3 \triangleright d(n) = 2$ ning seega $3 \triangleright n = 2$ — ka see võimalus annab vastuolu.

15. *Lahendus 1.* Paneme tähele, et vastavalt ülesande tingimustele saab arv n jagamisel 6-ga anda ainult jäägi 1 või 5, ning teeme induktsiooni arvu $\dfrac{n}{6}$ täisosa järgi. Induktsiooni baasi jaoks kontrollime vahetult, et väide kehtib $n=1$ ja $n=5$ korral. Induktsiooni sammu jaoks olgu $n>6$ ja $t = k^2+k+1$. Siis modulo t saame

$$\begin{aligned}
(k+1)^n - k^n - 1 &= (t+k)(k+1)^{n-2} - (t-(k+1))\,k^{n-2} - 1 \\
&\equiv k(k+1)^{n-2} + (k+1)k^{n-2} - 1 \\
&\equiv (t-1)\left((k+1)^{n-3} + k^{n-3}\right) - 1 \\
&\equiv -\left((k+1)^{n-3} + k^{n-3}\right) - 1 \\
&\equiv -\left((t+k)(k+1)^{n-5} + (t-(k+1))\,k^{n-5}\right) - 1 \\
&\equiv -k(k+1)^{n-5} + (k+1)k^{n-5} - 1 \\
&\equiv -(t-1)\left((k+1)^{n-6} - k^{n-6}\right) - 1 \\
&\equiv (k+1)^{n-6} - k^{n-6} - 1\,.
\end{aligned}$$

Lahendus 2. Olgu $P(k) = (k+1)^n - k^n - 1$ ning ω_1, ω_2 olgu polünoomi k^2+k+1 nullkohad. Siis tuleb näidata, et $P(\omega_1) = P(\omega_2) = 0$, kui $\text{SÜT}\,(n,6) = 1$.

16. Olgu $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ (vt. joonist 7). Nõutud võrratuse saame, kasutades kõigepealt koosinusteoreemi kolmnurkades AOB, BOC ja AOC ning seejärel kolmnurgavõrratust kolmnurgas ABC.



Joonis 7

17. *Vastus*: $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$, $y = 2$, $z = \dfrac{1 \mp \sqrt{2}}{2}$, $t = 2$ või $x = 2$, $y = \dfrac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$, $z = 2$, $t = \dfrac{1 \mp \sqrt{2}}{2}$.

    Olgu $A = x + z$ ja $B = y + t$. Antud võrrandisüsteem on samaväärne süsteemiga

$$\begin{cases} A + B = 5 \\ AB = 4 \\ Bxz + Ayt = 3 \\ (Bxz) \cdot (Ayt) = -4\,. \end{cases}$$

    Neist võrranditest leiame kõigepealt $\{A, B\} = \{1, 4\}$ ja $\{Bxz, Ayt\} = \{-1, 4\}$ ning seejärel x, y, z ja t.

18. *Vastus*: $x = y = 1 + \sqrt{2}$.

    Võrduse saab ümber kirjutada kujul

$$\frac{1}{x}\left(x - \sqrt{2x+1}\right)^2 + \frac{1}{y}\left(y - \sqrt{2y+1}\right)^2 = 0\,.$$

19. *Lahendus 1.* Kasutame induktsiooni. Kui $n = 1$, siis võrratus ilmselt kehtib. Induktsiooni sammu tõestamiseks piisab võrratuse

$$t^2(t-1)^{2n} + t^2(2t-1)^n \geqslant (t-1)^{2n+2} + (2t-1)^{n+1}$$

    tõestamisest. See võrratus tuleneb aga võrratustest $t^2 \geqslant (t-1)^2$ (mis kehtib $t \geqslant \dfrac{1}{2}$ korral) ning $t^2 \geqslant 2t - 1$ (mis kehtib iga reaalarvulise t korral).

    Lahendus 2. Kirjutame tõestatava võrratuse vasaku poole kujul

$$t^{2n} = (t^2)^n = \left((t-1)^2 + (2t-1)\right)^n\,.$$

    Saadud võrduse paremale poolele binoomvalemit rakendades saame summa, milles esinevad tõestatava võrratuse parema poole mõlemad liidetavad ning kõik ülejäänud liidetavad on mittenegatiivsed.

20. Tõstame esialgse võrduse mõlemad pooled ruutu ja kasutame murru lugejas iga reaalarvu x korral kehtivat võrratust $x(x+2) \leqslant (x+1)^2$. Saame

$$x_n^2 \leqslant \frac{(2n+1)\cdot(4n+1)}{(2n)^2} < 2 + \frac{2}{n}\,.$$

Toimides sarnaselt murru nimetajas, saame

$$x_n^2 \geqslant \frac{(4n+1)^2}{2n\cdot 4n} > 2 + \frac{1}{n}\,.$$

Seega

$$\frac{1}{n} < x_n^2 - 2 < \frac{2}{n}$$

ja

$$\frac{1}{n(x_n+\sqrt{2})} < x_n - \sqrt{2} < \frac{2}{n(x_n+\sqrt{2})}\,.$$

Esimesest võrratuste ahelast saame $x_n > \sqrt{2}$ ja $x_n < 2$, nõutud tulemus järeldub nüüd teisest ahelast.