Matemaatikaolümpiaad “Balti tee ’99”

Reykjavikis, 6. novembril 1999

1. Leia kõik reaalarvude nelikud (a, b, c, d), mis rahuldavad järgmist võrrandisüsteemi.

$$\begin{cases} abc + ab + bc + ca + a + b + c = 1 \\ bcd + bc + cd + db + b + c + d = 9 \\ cda + cd + da + ac + c + d + a = 9 \\ dab + da + ab + bd + d + a + b = 9 \end{cases}$$

2. Leia kõik sellised positiivsed täisarvud n, millest kuupjuure saame arvu n kolme viimast kümnendnumbrit ära jättes.

3. Leia kõik täisarvud $n \geqslant 3$, mille jaoks võrratus

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1 \leqslant 0$$

kehtib mistahes selliste reaalarvude a_1, a_2, $\ldots$, a_n korral, kus $a_1 + \ldots + a_n = 0$.

4. Mistahes positiivsete reaalarvude x ja y jaoks olgu

$$f(x, y) = \min\left(x, \frac{y}{x^2 + y^2}\right).$$

Tõesta, et leiduvad sellised positiivsed x_0 ja y_0, et $f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$ kõigi positiivsete x ja y korral, ning leia $f(x_0, y_0)$.

5. Punkt (a, b) paikneb ringjoonel $x^2 + y^2 = 1$. Ringjoonele selles punktis tõmmatud puutujal on parabooliga $y = x^2 + 1$ täpselt üks ühine punkt. Leia kõik niisugused punktid (a, b).

6. Leia vähim käikude arv, millega maleratsu saab liikuda $n \times n$ malelaua $(n \geqslant 4)$ ühest nurgast vastasnurka.

7. Nimetame 8×8 malelaua kaht ruutu *naaberruutudeks*, kui neil on ühine külg või ühine nurk. Kas malekuningas saab mingilt ruudult alustades käia läbi kõik ruudud täpselt üks kord nii, et igal sammul peale esimese käib ta ruudule, millel on paarisarv juba läbitud naaberruute?

8. On antud 1999 paarikaupa erineva kaaluga münti ning aparaat, millega saab mistahes kolme mündi korral määrata neist kaalult keskmise. Tõesta, et kaalult 1000-nda mündi saab leida, kasutades aparaati mitte rohkem kui 1 000 000 korda, ning et see on ainus münt, mille järjekorranumbrit (kaalu järgi) on selle aparaadi abil võimalik kindlaks määrata.

9. Kuup servapikkusega 3 on jaotatud 27 ühikkuubiks. Ühikkuubid nummerdatakse suvalisel viisil arvudega 1, 2, $\ldots$, 27, nii et igal ühikkuubil on erinev number. Moodustame 27 võimalikku reasummat (igas kuubi servadega paralleelses sihis saame üheksa summat, millest igaüks sisaldab kolme ühikkuubi numbrid). Kui mitu neist 27 summast võivad maksimaalselt olla paaritud?

10. Kas ringi raadiusega 1 (ringjoon kaasa arvatud) kõikide punktide hulga saab jaotada kolmeks alamhulgaks nii, et ükski neist kolmest alamhulgast ei sisalda kaht punkti vahekaugusega 1?

11. Tõesta, et tasandi mistahes nelja punkti korral, millest ükski kolmik ei asu ühel sirgel, leidub selline ringjoon, mis läbib kolme neist neljast punktist ning neljas punkt paikneb kas ringjoonel või selle sisepiirkonnas.

12. Kolmnurgas ABC kehtib seos $2|AB| = |AC| + |BC|$. Tõesta, et kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkt, ümberringjoone keskpunkt ning külgede AC ja BC keskpunktid paiknevad ühel ringjoonel.

13. Kolmnurga ABC nurkade A ja B poolitajad lõikavad külgi BC ja CA vastavalt punktides D ja E. Leia nurga C suurus, kui $|AE| + |BD| = |AB|$.

14. Olgu ABC võrdhaarne kolmnurk, kus $|AB| = |AC|$. Külgedel AB ja AC võetakse vastavalt punktid D ja E. Punkti B läbiv ja küljega AC paralleelne sirge lõikab sirget DE punktis F ning punkti C läbiv ja küljega AB paralleelne sirge lõikab sirget DE punktis G. Tõesta, et

$$\frac{S_{DBCG}}{S_{FBCE}} = \frac{|AD|}{|AE|},$$

kus S_{PQRS} tähistab nelinurga $PQRS$ pindala.

15. Kolmnurgas ABC on $\angle C = 60^\circ$ ja $|AC| < |BC|$. Punkt D asub küljel BC ja rahuldab tingimust $|BD| = |AC|$. Külge AC pikendatakse punktini E, nii et $|AC| = |CE|$. Tõesta, et $|AB| = |DE|$.

16. Leia vähim positiivne täisarv k, mis on esitatav kujul $k = 19^n - 5^m$, kus m ja n on positiivsed täisarvud.

17. Kas leidub niisugune lõplik täisarvude järjend $c_1, \ldots, c_n$, et $a + c_1, \ldots, a + c_n$ on kõik algarvud rohkem kui ühe, ent mitte lõpmata paljude täisarvude a korral?

18. Olgu m selline positiivne täisarv, et $m \equiv 2 \pmod 4$. Tõesta, et leidub ülimalt üks teguriteks lahutus $m = ab$, kus positiivsed täisarvud a ja b rahuldavad tingimusi $0 < a - b < \sqrt{5 + 4\sqrt{4m + 1}}$.

19. Tõesta, et leidub lõpmata palju selliseid positiivseid paarisarve k, et $p^2 + k$ on kordarv iga algarvu p korral.

20. Olgu a, b, c ja d algarvud, mis rahuldavad tingimusi $a > 3b > 6c > 12d$ ja $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1749$. Leia avaldise $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ kõik võimalikud väärtused.

Ülesannete lahendused

1. *Vastus:* $a = b = c = \sqrt[3]{2} - 1,\ d = 5\sqrt[3]{2} - 1$.

   Tehes asendused $x = a + 1,\ y = b + 1,\ z = c + 1$ ja $w = d + 1$, saame

$$\begin{cases} xyz = 2 \\ yzw = 10 \\ zwx = 10 \\ wxy = 10 \end{cases} .$$

   Korrutades kolme esimese võrrandi vastavad pooled, saame $z^3(xyw)^2 = 200$, mis koos neljanda võrrandiga annab $z^3 = 2$. Analoogiliselt leiame $x^3 = y^3 = 2$ ja $w^3 = 250$. Seega on ainsaks lahendiks $a = b = c = \sqrt[3]{2} - 1,\ d = 5\sqrt[3]{2} - 1$.

2. *Vastus:* ainus selline arv on 32768.

   Olgu m arv, mis saadakse arvust n selle kolme viimase kümnendnumbri ärajätmisel, siis $1000m \leqslant n < 1000(m + 1)$. Et ülesande tingimuste kohaselt $n = m^3$, saame võrratuse $m^2 \geqslant 1000$, millest $m \geqslant 32$. Teisest võrratusest leiame nüüd

$$m^2 < 1000 \cdot \frac{m+1}{m} \leqslant 1000 \cdot \frac{33}{32} = 1000 + \frac{1000}{32} \leqslant 1032 ,$$

   millest $m \leqslant 32$. Seega on ainus lahend $m = 32$ ning $n = m^3 = 32768$.

3. *Vastus:* $n = 3$ ja $n = 4$.

   Kui $n = 3$, siis

$$a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 = \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2 - (a_1^2 + a_2^3 + a_3^2)}{2} \leqslant \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{2} = 0 .$$

   Kui $n = 4$, saame aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest

$$a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_1 = (a_1 + a_3)(a_2 + a_4) \leqslant \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2}{2} = 0 .$$

   Olgu nüüd $n \geqslant 5$, siis võttes $a_1 = -1$, $a_2 = -2$, $a_{n-1} = 2$, $a_n = 1$ ning $a_3 = a_4 = \ldots = a_{n-2} = 0$ saame

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 2 + 2 - 1 = 3 > 0 .$$

4. *Vastus:* otsitav maksimum on $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

   Kasutame võrratust $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$. Kui $x \leqslant \frac{y}{x^2 + y^2}$, siis saame

$$x \leqslant \frac{y}{x^2 + y^2} \leqslant \frac{y}{2xy} = \frac{1}{2x} ,$$

   kust $x \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, kusjuures võrdus kehtib parajasti siis, kui $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Kui aga $x > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, siis

$$\frac{y}{x^2+y^2} \leqslant \frac{y}{2xy} = \frac{1}{2x} < \frac{1}{\sqrt{2}} \, .$$

Niisiis on üks arvudest x ja $\dfrac{y}{x^2+y^2}$ alati mitte suurem kui $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ning seega $f(x,y) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, kusjuures võrdus kehtib parajasti siis, kui $x = y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

5. *Vastus:* $(-1,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $\left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}, -\frac{1}{5}\right)$, $\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}, -\frac{1}{5}\right)$.

Et parabooli $y = x^2+1$ mistahes mittevertikaalne lõikaja lõikab seda parabooli kahes punktis, siis peab vaadeldav sirge olema kas vertikaalne või siis ringjoone ja parabooli ühine puutuja. On ilmne, et vertikaalsetest sirgetest rahuldavad ülesande tingimusi ainult sirged $x = 1$ ja $x = -1$, mis puutuvad ringjoont vastavalt punktides $(1,0)$ ja $(-1,0)$.

Vaatleme nüüd mittevertikaalset sirget võrrandiga $y = kx + l$. See sirge on ringjoone puutuja, kui võrrandisüsteemil

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ y = kx+l \end{cases} \tag{1}$$

ehk samaväärselt võrrandil $x^2 + (kx+l)^2 = 1$ on täpselt üks lahend, s.t. kui

$$D_1 = 4k^2l^2 - 4(1+k^2)(l^2-1) = 4(k^2-l^2+1) = 0 \, ,$$

ehk $l^2 - k^2 = 1$. Sama sirge on parabooli puutuja, kui võrrandisüsteemil

$$\begin{cases} y = x^2+1 \\ y = kx+l \end{cases}$$

ehk samaväärselt võrrandil $x^2 = kx + l - 1$ on täpselt üks lahend, s.t. kui

$$D_2 = k^2 - 4(1-l) = k^2 + 4l - 4 = 0 \, .$$

Võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} l^2 - k^2 = 1 \\ k^2 + 4l - 4 = 0 \end{cases}$$

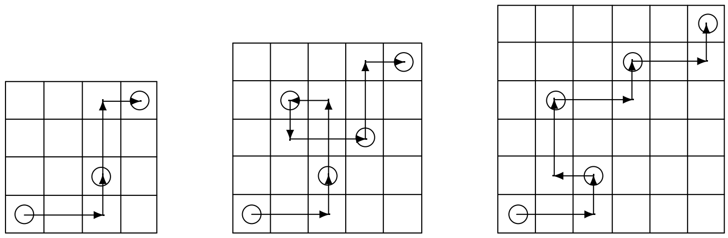
saame ruutvõrrandi $l^2 + 4l - 5 = 0$, mille lahenditeks on $l = 1$ ja $l = -5$. Seega on selle võrrandisüsteemi lahenditeks $k = 0$, $l = 1$ ja $k = \pm 2\sqrt{6}$, $l = -5$ ning võrrandisüsteemist (1) saame sirge ja ringjoone puutepunkti koordinaatideks vastavalt $(0,1)$ ja $\left(\pm\frac{2\sqrt{6}}{5}, -\frac{1}{5}\right)$.

6. *Vastus:* $2 \cdot \left[\dfrac{n-1}{3}\right]$.

Nummerdame malelaua ruudud arvupaaridega (a, b), kus $1 \leqslant a, b \leqslant n$, ning leiame käikude arvu, millega maleratsu saab ruudult $(1, 1)$ liikuda ruudule (n, n).

Paneme tähele, et maleratsu käib alati üht värvi ruudult teist värvi ruudule ning liigub ühe käiguga horisontaal- ja vertikaalsuunas kokku 3 ruudu võrra. Et ruudud $(1, 1)$ ja (n, n) on üht ja sama värvi, siis peab käikude koguarv olema paarisarv $N = 2m$, mis ei saa olla väiksem kui $\frac{2 \cdot (n-1)}{3}$. Seega $m \geqslant \left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil$ ning $N \geqslant 2 \cdot \left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil$.

Jääb üle veenduda, et selline käikude arv on piisav. Joonisel 1 on näidatud sobivad liikumisteed (vastavalt 2, 4 ja 4 sammuga) $n = 4$, $n = 5$ ja $n = 6$ korral. Et esimene neist võimaldab ratsul liikuda 2 sammuga ruudult (k, k) ruudule $(k+3, k+3)$ ning n kasvamisel 3 võrra arv $2 \cdot \left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil$ suureneb 2 võrra, saab maleratsu liikuda $n \times n$ malelaua ühest nurgast vastasnurka $2 \cdot \left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil$ sammuga mistahes $n \geqslant 4$ korral.



$n = 4$ $n = 5$ $n = 6$

Joonis 1

7. *Vastus:* ei saa.

Näitame, et erinevaid naaberruutude paare on kokku paarisarv, kuid iga käigu järel on neist paaritu arv sellised, mille mõlemal ruudul kuningas on viibinud. Seega ei saa kuningas ülesandes kirjeldatud reeglit järgides käia läbi malelaua kõiki ruute.

Tõepoolest, malelaua pöördel 180° võrra ümber oma keskpunkti teisenduvad naaberruutude paarid naaberruutude paarideks, kusjuures täpselt kaks naaberruutude paari (ruudud, mille ühiseks tipuks on malelaua keskpunkt) teisenduvad iseendaks. Seega on naaberruutude paare kokku paarisarv.

Veendume nüüd, et neid naaberruutude paare, mille mõlemal ruudul kuningas on viibinud, on iga käigu järel paaritu arv. Tõepoolest, esimese käigu järel on täpselt üks selline naaberruutude paar ning iga järgmise käigu järel lisandub neid paarisarv, sest ruudul, millele kuningas käib, on vastavalt ülesande tingimusele paarisarv juba läbitud naaberruute.

Märkus. Arutluses me ei kasutanud tingimust, et kuningas külastab iga ruutu ainult üks kord. Seega pole kuningal võimalik nõutud viisil kõiki ruute läbi käia ka siis, kui sellest tingimusest loobuda.

8. Näitame kõigepealt, kuidas leida kaalult 1000. (ehk järjekorras keskmine) münt. Kõigepealt leiame 1997 kaalumise abil raskeima ja kergeima mündi, pannes iga kaalumise järel kõrvale kaalult keskmise mündi ning võttes selle asemele ühe neist, mida

pole veel kaalutud. Seejärel leiame ülejäänud 1997 mündi hulgast 1995 kaalumise abil kergeima ja raskeima jne. kuni

$$1997 + 1995 + 1993 + \ldots + 3 + 1 = 999 \cdot 999 < 1000000$$

kaalumise järel jääb järele otsitav kaalujärjekorras keskmine münt.

Näitame nüüd, et ühegi teise mündi järjekorranumbrit kaalu järgi ei ole võimalik leida, kuna aparaat ei võimalda meil eristada omavahel kaalult k. ja $(2000-k)$. münti. Tõepoolest: olgu mingi k. mündi (kus $k \neq 1000$) leidmist võimaldav protseduur olemas. Tähistame mündid kaalude kasvamise järjekorras $a_1, a_2, \ldots, a_{1999}$ ja kirjutame selle protseduuri rakendamisel tehtud kaalumised järgmisse tabelisse:

Münt 1	Münt 2	Münt 3	Keskmine
a_{i_1}	a_{j_1}	a_{k_1}	a_{m_1}
a_{i_2}	a_{j_2}	a_{k_2}	a_{m_2}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
a_{i_n}	a_{j_n}	a_{k_n}	a_{m_n}

Oletame, et selle protseduuri rakendamine andis tulemuse "kaalult k. münt on a_k". Kui nüüd mündid ümber nummerdada kaalude kasvamise järjekorras, annab iga kasutatud kaalumine täpselt sama tulemuse nagu enne, kuid a_k on nüüd kaalult $(2000-k)$. münt.

9. *Vastus:* 24.

Et iga ühikkuup osaleb täpselt kolmes reasummas, siis on kõigi 27 reasumma kogusumma $3 \cdot (1 + 2 + \ldots + 27) = 3 \cdot 14 \cdot 27$, s.t. paarisarv. Seega peab paarituid reasummasid olema paarisarv.

Näitame, et paarituid reasummasid ei saa olla 26, sest kui mingis kuubi kihis on üks paarisarvuline reasumma, siis on samas kihis ka teine selline. Tõepoolest: kui see paarissumma koosneb kolmest paarisarvust (juht (a) joonisel 2, kus $+$ tähistab paaris- ja $-$ paaritut arvu), siis selleks, et ei tekiks paarisarvulisi teisesihilisi reasummasid, peab igaühes kolmest teisesihilisest reast olema veel täpselt üks paarisarv. Siis on aga kahes ülejäänud samasihilises reas kokku kolm paaritut ja kolm paarisarvu ning nende reasummad ei saa mõlemad olla paaritud arvud. Kui see paarissumma koosneb aga ühest paarisarvust ja kahest paaritust arvust (juht (b) joonisel 2), siis seda paarisarvu sisaldavas teisesihilises reas peab olema veel üks paarisarv ja üks paaritu arv ning kahes ülejäänud teisesihilises reas mõlemad ühe paarsusega arvud. Seega on nende ridade reasummad erineva paarsusega, ehk üks neist peab olema paarisarv.

$+$	$+$	$+$

(a)

$+$	$-$	$-$

(b)

Joonis 2

$+$	$+$	$-$
$-$	$+$	$+$
$+$	$-$	$+$

I

$+$	$+$	$-$
$-$	$+$	$+$
$+$	$-$	$+$

II

$-$	$-$	$-$
$-$	$-$	$-$
$-$	$+$	$-$

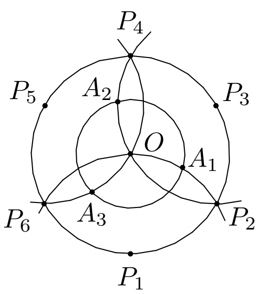
III

Joonis 3

Jääb üle veenduda, et 24 paaritut reasummat on võimalik (vt. joonis 3, kus on kujutatud kuubi kolm paralleelset kihti).

10. *Vastus:* ei saa.

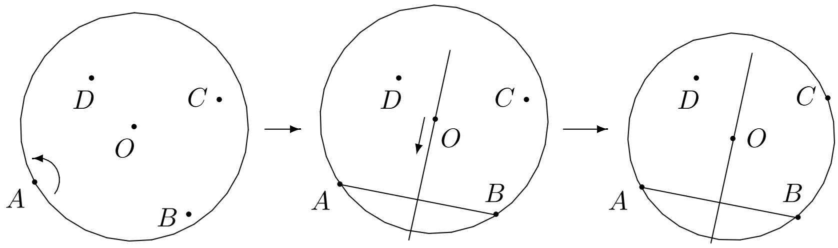
Olgu $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ korrapärane kuusnurk, mille tipud painavad vaadeldaval ringjoonel, ja O selle ringjoone keskpunkt (vt. joonist 4).



Joonis 4

Siis punktid P_1, $P_3\,P_5$ peavad kuuluma ühte, punktid P_2, $P_4\,P_6$ teise ja punkt O kolmandasse vaadeldavasse alamhulka. Tõmbame ringjooned raadiusega 1 ja keskpunktidega punktides P_1, P_3 ja P_5: kõik nendel ringjoontel paiknevad punktid peavad kuuluma teise või kolmandasse alamhulka. Nende ringjoonte lõikepunktid A_1, A_2 ja A_3 ringjoonega, mille raadius on $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ning keskpunkt punktis O, on aga paarikaupa vahekaugustega 1 ning peavad seega kuuluma erinevatesse alamhulkadesse, mis ei ole võimalik.

11. *Lahendus 1.* Valime suvalise ringjoone, mis sisaldab antud nelja punkti oma sisepiirkonnas. Vähendame selle ringjoone raadiust, kuni vähemalt üks antud punktidest (olgu see punkt A) paikneb sellel ringjoonel. Kui ülejäänud kolm punkti on endiselt selle ringjoone sisepiirkonnas, siis pöörame ringjoont selle raadiust muutmata ümber punkti A, kuni veel vähemalt üks ülejäänud punktidest (olgu see B) on sellel ringjoonel. Ringjoone keskpunkt paikneb nüüd lõigu AB keskristsirgel — nihutades seda mööda lõigu AB keskristsirget (ning ühtlasi muutes ringjoone raadiust, nii et punktid A ja B jääksid endiselt ringjoonele) saavutame olukorra, kus ringjoon hakkab läbima ka vähemalt ühte ülejäänud kahest punktist (vt. joonist 5).

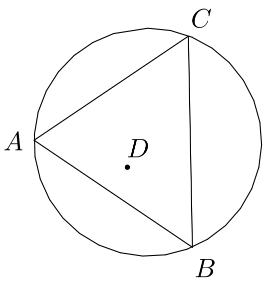


Joonis 5

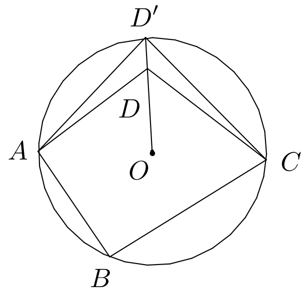
Lahendus 2. Vaatleme eraldi juhte, kus need neli punkti on mittekumera või kumera nelinurga tippudeks.

Esimesel juhul paikneb üks neist punktidest sellise kolmnurga sisepiirkonnas, mille tippudeks on ülejäänud kolm punkti (vt. joonist 6) – nõutud omadusega on selle kolmnurga ümberringjoon.

Paiknegu antud punktid nüüd kumera nelinurga $ABCD$ tippudes. Sellel nelinurgal leidub vastasnurkade paar, mille summa on vähemalt 180° — olgu need tippude B ja D juures (vt. joonist 7). Punkt D paikneb siis kolmnurga ABC ümberringjoone sees või sellel ringjoonel (selles veendumiseks vaatleme kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunktist O läbi punkti D tõmmatud kiire lõikepunkti D' selle ringjoonega: et $\angle B + \angle D' = 180^\circ$ ja $\angle B + \angle D \geqslant 180^\circ$, ei saa punkt D olla sellest ringjoonest väljaspool).



Joonis 6

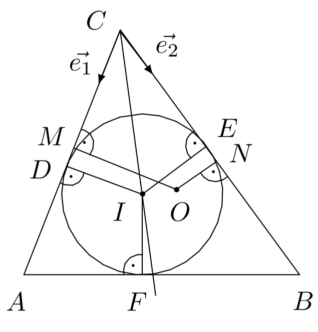


Joonis 7

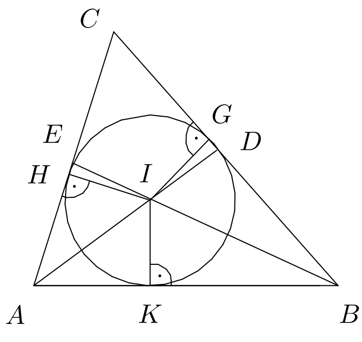
12. Olgu I ja O vastavalt kolmnurga ABC sise- ja ümberringjoone keskpunktid, D, E ja F siseringjoone puutepunktid vastavalt külgedega AC, BC ja AB ning M ja N vastavalt külgede AC ja BC keskpunktid (vt. joonist 8). Punktid M ja N paiknevad ringjoonel diameetriga OC, sest $\angle CMO = \angle CNO = 90^\circ$. Näitame, et ka punkt I paikneb samal ringjoonel. Tõepoolest, kuna

$$|AD| + |BE| = |AF| + |BF| = |AB| = \frac{|AC| + |BC|}{2} = |AM| + |BN|\,,$$

siis $|MD| = |NE|$. Lõigud MD ja NE on aga lõigu OI ristprojektsioonid vastavalt nurga ACB haaradele AC ja BC, seega lõik IO peab olema risti või paralleelne nurga ACB poolitajaga CI. (Selle väite formaalseks tõestuseks võime vaadelda vektorite $\overrightarrow{CA}$ ja $\overrightarrow{CB}$ suunalisi ühikvektoreid $\vec{e_1}$ ja $\vec{e_2}$ ning näidata, et $|MD| = |NE|$ on samaväärne tingimusega $(\vec{e_1} \pm \vec{e_2}) \cdot \overrightarrow{IO} = 0$.)



Joonis 8



Joonis 9

Kui lõik IO on risti sirgega CI, siis $\angle CIO = 90^\circ$, mida oligi tarvis tõestada. Kui aga lõik IO on paralleelne sirgega CI, siis paikneb ümberringjoone keskpunkt O nurga ACB poolitajal CI, mistõttu $|AC| = |BC|$ ja tingimusest $2|AB| = |AC|+|BC|$ saame, et kolmnurk ABC on võrdkülgne ning punktid O ja I langevad kokku — seega ka sel juhul tõestatav väide kehtib.

13. *Vastus:* 60°.

Olgu I kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkt ning G, H ja K selle puutepunktid vastavalt külgedega BC, AC ja AB (vt. joonist 9). Siis

$$|AE| + |BD| = |AB| = |AK| + |BK| = |AH| + |BG| ,$$

kust $|DG| = |EH|$. Seega täisnurksed kolmnurgad DIG ja EIH on kongruentsed, mistõttu

$$\angle DIE = \angle GIH = 180^\circ - \angle C .$$

Teiselt poolt aga

$$\angle DIE = \angle AIB = 180^\circ - \frac{\angle A + \angle B}{2} .$$

Seega

$$\angle C = \frac{\angle A + \angle B}{2} = 90^\circ - \frac{\angle C}{2} ,$$

kust $\angle C = 60^\circ$.

14. *Lahendus 1.* Kuna trapetsite $DBCG$ ja $FBCE$ kõrgused on võrdsed, siis piisab tõestada, et

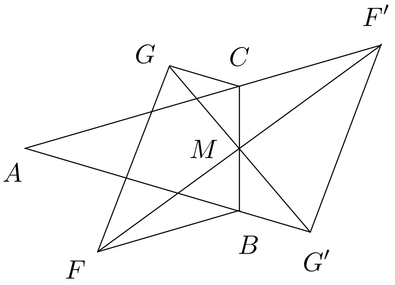
$$\frac{|BD| + |CG|}{|BF| + |CE|} = \frac{|AD|}{|AE|} .$$

Olgu M külje BC keskpunkt ning F' ja G' vastavalt punktidega F ja G punkti M suhtes sümmeetrilised punktid (vt. joonist 10). Kuna lõik CG on paralleelne kolmnurga küljega AB, siis paikneb punkt G' sirgel AB, kusjuures $|BG'| = |CG|$. Analoogiliselt veendume, et punkt F' paikneb sirgel AC, kusjuures $|CF'| = |BF|$. Seega piisab veenduda, et

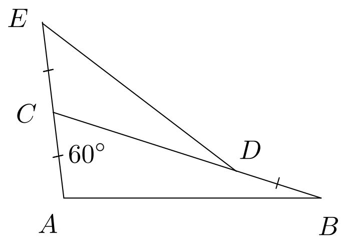
$$\frac{|DG'|}{|EF'|} = \frac{|AD|}{|AE|} ,$$

mis järeldub sellest, et lõigud DE ja $F'G'$ on paralleelsed.

Lahendus 2. Avalda nelinurkade pindalad kujul $S_{DBCG} = S_{ABC} - S_{ADE} + S_{ECG}$ ja $S_{FBCE} = S_{ABC} - S_{ADE} + S_{DBF}$ ning arvuta.



Joonis 10



Joonis 11

15. Koosinusteoreemist kolmnurgas ABC saame

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= |AC|^2 + |BC|^2 - 2\cdot|AC|\cdot|BC|\cdot\cos\angle ACB = \\ &= |AC|^2 + |BC|^2 - |AC|\cdot|BC| = \\ &= |AC|^2 + (|BD| + |DC|)^2 - |AC|\cdot(|BD| + |DC|) = \\ &= |AC|^2 + (|AC| + |DC|)^2 - |AC|\cdot(|AC| + |DC|) = \\ &= |AC|^2 + |DC|^2 + |AC|\cdot|DC| \end{aligned}$$

(vt. joonist 11). Koosinusteoreemist kolmnurgas CDE saame

$$\begin{aligned} |DE|^2 &= |DC|^2 + |CE|^2 - 2\cdot|DC|\cdot|CE|\cdot\cos\angle DCE = \\ &= |DC|^2 + |CE|^2 + |DC|\cdot|EC| = \\ &= |DC|^2 + |AC|^2 + |DC|\cdot|AC| \,. \end{aligned}$$

Seega $|AB| = |DE|$.

16. *Vastus:* 14.

Näitame, et ükski postiivne arv kujul $19^n - 5^m$ ei ole väiksem kui $19^1 - 5^1 = 14$. Selleks paneme tähele, et arvu 5^m viimane number on alati 5 ning arvu $19^n - 5^m$ viimane number on seega 6 paarisarvulise n korral ja 4 paarituarvulise n korral.

Kui n on paarisarv, siis on ainus 14-st väiksem sobiv arv 6. Võrdusest $19^n - 5^m = 6$ saame, et 5^m peab 3-ga jagamisel andma jäägi 1 ning seega m peab samuti olema paarisarv. Olgu $n = 2n'$ ja $m = 2m'$, siis saame m' ja n' jaoks võrrandi

$$(19^n - 5^m) = (19^{n'} - 5^{m'})\cdot(19^{n'} + 5^{m'}) = 6$$

millel ilmselt täisarvulised lahendid puuduvad.

Kui n on paaritu arv, siis peaks olema $19^n - 5^m = 4$, kuid arv $19^n - 5^m$ ei anna ühegi m väärtuse korral 3-ga jagades jääki 1.

17. *Vastus:* jah.

Olgu $n = 5$, siis 3, 5, 11, 17 ja 29 on kõik algarvud ning $2 + 3 = 5$, $2 + 5 = 7$, $2 + 11 = 13$, $2 + 17 = 19$ ja $2 + 29 = 31$ on samuti algarvud. Näitame, et arvud $a + 3$, $a + 5$, $a + 11$, $a + 17$ ja $a + 29$ on kõik algarvud ainult $a = 0$ ja $a = 2$ korral. Tõepoolest, need arvud annavad 5-ga jagamisel erinevad jäägid ning üks neist peab seega jaguma 5-ga. Seetõttu saavad nad olla kõik algarvud ainult siis, kui üks neist on arv 5, mis peab paika parajasti $a = 0$ ja $a = 2$ korral.

18. Tõstes võrratuse $a-b<\sqrt{5+4\sqrt{4m+1}}$ pooled ruutu saame $(a-b)^2<5+4\sqrt{4m+1}$. Et $m=ab$, siis

$$(a+b)^2<5+4\sqrt{4m+1}+4m=(\sqrt{4m+1}+2)^2$$

ning $a,\,b>0$ tõttu

$$a+b<\sqrt{4m+1}+2\,.$$

Et $m=ab$ annab 4-ga jagamisel jäägi 2, siis on a ja b erineva paarsusega ning $a+b$ on seega paaritu arv. Kuna $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}=\sqrt{4m}$ ning $4m$ ei saa olla täisruut, siis

$$a+b\geqslant\sqrt{4m+1}\,.$$

Poollõigul $[\sqrt{4m+1},\sqrt{4m+1}+2)$ on aga üksainus paaritu arv ning kuna tingimuse $a>b$ tõttu erinevad teguriteks lahutused $m=ab$ annavad ka erinevad summad $a+b$, siis saabki ülesande tingimusi rahuldavaid teguriteks lahutusi $m=ab$ olla ülimalt üks.

19. Mistahes algarvu $p\neq 3$ ruut annab 3-ga jagamisel jäägi 1. Seega $p\neq 3$ jaoks sobivad arvud kujul $k=6m+2$, mille korral p^2+k jagub 3-ga ning on järelikult kordarv.

Et ka arv 3^2+k oleks kordarv, püüame valida sellised m väärtused, mille korral $k=6m+2$ annaks 5-ga jagamisel jäägi 1 — siis 3^2+k jagub 5-ga ning on seega kordarv. Võttes $m=5t+4$, saame $k=30t+26$, mis annab 3-ga jagamisel jäägi 2 ja 5-ga jagamisel jäägi 1. Seega $p^2+(30t+26)$ on kordarv mistahes naturaalarvu t ja algarvu p korral.

20. *Vastus:* ainus võimalik väärtus on 1999.

Et $a^2-b^2+c^2-d^2$ oleks paaritu arv, peab üks algarvudest a, b, c ja d olema 2 ning tingimuse $a>3b>6c>12d$ tõttu saab see olla üksnes d. Nüüd

$$1749=a^2-b^2+c^2-d^2>9b^2-b^2+4d^2-d^2=8b^2-12\,,$$

kust $b\leqslant 13$. Tingimusest $4<c<\dfrac{b}{2}$ saame nüüd $c=5$ ning b väärtus võib seega olla ainult 11 või 13. Jääb üle kontrollida, et $1749+2^2-5^2+13^2=1897$ ei ole täisruut ning $1749+2^2-5^2+11^2=1849=43^2$. Niisiis $b=11$ ja $a=43$ ning

$$a^2+b^2+c^2+d^2=43^2+11^2+5^2+2^2=1999\,.$$