Matemaatikaolümpiaad "Balti tee '98"

Varssavis, 8. novembril 1998

1. Leia kõik kahe muutuja funktsioonid f, mille argumendid x ja y ning väärtused $f(x,y)$ on positiivsed täisarvud ja mis kõigi positiivsete täisarvude x, y korral rahuldavad järgmisi tingimusi:
$$\begin{aligned} f(x,x) &= x\ , \\ f(x,y) &= f(y,x)\ , \\ (x+y)f(x,y) &= yf(x,x+y)\ . \end{aligned}$$

2. Nimetame positiivsete täisarvude kolmikut (a,b,c) *kvaasi-pythagorase kolmikuks*, kui leidub kolmnurk, mille külgede pikkused on a, b ja c ning külje c vastasnurga suurus on 120°. Tõesta, et kui (a,b,c) on kvaasi-pythagorase kolmik, siis leidub arvul c algtegur, mis on suurem kui 5.

3. Leia kõik positiivsed täisarvud x ja y, mis rahuldavad võrrandit
$$2x^2+5y^2=11(xy-11)\ .$$

4. Olgu P selline täisarvuliste kordajatega polünoom, et $P(n)$ on iga $n=1,2,3,\ldots,1998$ korral kolmekohaline positiivne täisarv. Tõesta, et polünoomil P ei leidu täisarvulisi juuri.

5. Olgu a paaritu ja b paarisnumber. Tõesta, et iga positiivse täisarvu n korral leidub niisugune positiivne täisarv, mis jagub arvuga 2^n ning mille kümnendesitus ei sisalda teisi numbreid peale a ja b.

6. Olgu P kuuenda astme polünoom ning a ja b niisugused reaalarvud, et $0<a<b$. Tõesta, et kui $P(a)=P(-a)$, $P(b)=P(-b)$ ja $P'(0)=0$, siis iga reaalarvu x korral $P(x)=P(-x)$.

7. Olgu $\mathbb{R}$ kõigi reaalarvude hulk. Leia kõik funktsioonid $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, mis rahuldavad iga $x,y\in\mathbb{R}$ korral võrdust
$$f(x)+f(y)=f(f(x)f(y))\ .$$

8. Olgu $P_k(x)=1+x+x^2+\ldots+x^{k-1}$. Tõesta, et
$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}P_k(x)=2^{n-1}P_n\Big(\frac{1+x}{2}\Big)$$
iga reaalarvu x ja iga positiivse täisarvu n korral.

9. Rahuldagu arvud α ja β võrratusi $0<\alpha<\beta<\pi/2$ ning olgu arvud γ ja δ määratud järgmiste tingimustega:
   (i) $0<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$ ning $\tan\gamma$ on arvude $\tan\alpha$ ja $\tan\beta$ aritmeetiline keskmine;

(ii) $0 < \delta < \dfrac{\pi}{2}$ ning $\dfrac{1}{\cos\delta}$ on arvude $\dfrac{1}{\cos\alpha}$ ja $\dfrac{1}{\cos\beta}$ aritmeetiline keskmine.

Tõesta, et $\gamma < \delta$.

10. Olgu $n \geqslant 4$ paarisarv. Ühikringjoone sisse on joonestatud kaks korrapärast kõõlhulknurka, ühel neist n ja teisel $n-1$ tippu. Vaatleme n-nurga iga tipu jaoks tema kaugust $(n-1)$-nurga lähimast tipust mõõdetuna mööda ringjoont. Olgu S nende n kauguse summa. Tõesta, et S sõltub ainult arvust n, mitte aga hulknurkade asendist teineteise suhtes.

11. Olgu a, b ja c mingi kolmnurga külgede pikkused ning R selle kolmnurga ümberringjoone raadius. Tõesta, et

$$R \geqslant \frac{a^2+b^2}{2\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}\,.$$

Millal kehtib võrdus?

12. Olgu ABC kolmnurk ning $\angle BAC = 90^\circ$. Punkt D asub küljel BC ja rahuldab tingimust $\angle BDA = 2\angle BAD$. Tõesta, et

$$\frac{1}{|AD|} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{|BD|} + \frac{1}{|CD|}\right).$$

13. Kumeras viisnurgas $ABCDE$ on küljed AE ja BC paralleelsed ning $\angle ADE = \angle BDC$. Diagonaalid AC ja BE lõikuvad punktis P. Tõesta, et $\angle EAD = \angle BDP$ ning $\angle CBD = \angle ADP$.

14. On antud kolmnurk ABC, milles $|AB| < |AC|$. Sirge, mis läbib punkti B ning on paralleelne sirgega AC, lõikab $\angle BAC$ välisnurga poolitajat punktis D. Sirge, mis läbib punkti C ning on paralleelne sirgega AB, lõikab sama nurgapoolitajat punktis E. Küljel AC võetakse punkt F nii, et $|FC| = |AB|$. Tõesta, et $|DF| = |FE|$.

15. Olgu ABC teravnurkne kolmnurk ning D punktist A küljele BC tõmmatud ristlõigu aluspunkt. Punkt E asub lõigul AD ja rahuldab võrdust

$$\frac{|AE|}{|ED|} = \frac{|CD|}{|DB|}\,.$$

Olgu F punktist D lõigule BE tõmmatud ristlõigu aluspunkt. Tõesta, et $\angle AFC = 90^\circ$.

16. Kas 13×13 malelauda saab katta neljakümne kahe 4×1 klotsiga nii, et ainult malelaua keskmine ruut jääb katmata? (Eeldame, et iga klots katab täpselt neli malelaua ruutu.)

17. Olgu n ja k positiivsed täisarvud. On antud nk ühesuurust objekti ning k kasti, mis kõik mahutavad n objekti. Iga objekt värvitakse ühega k erinevast värvist. Tõesta, et objektid saab kastidesse paigutada nii, et igasse kasti satub ülimalt kahte värvi objekte.

18. Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille jaoks leidub järgmiste omadustega hulk S:

    (i) S koosneb n positiivsest täisarvust, mis on väiksemad kui 2^{n-1};

(ii) hulga S iga kahe erineva alamhulga A ja B korral erineb hulga A elementide summa hulga B elementide summast.

19. Kahe tuhandeliikmelise meeskonna vahel peeti lauatennisematš. Iga võistleja mängis teise meeskonna iga liikmega täpselt ühe korra (lauatennises ei või kohtumine lõppeda viigiga). Tõesta, et saab valida kümme samasse meeskonda kuuluvat mängijat nii, et teise võistkonna iga liige kaotas vähemalt ühele valituist.

20. Ütleme, et positiivne täisarv m *katab* arvu 1998, kui numbrid 1, 9, 9, 8 esinevad (selles järjekorras) arvu m numbritena. (Näiteks 2**1**5**99**36**98** katab arvu 1998, 213326798 aga mitte.)

    Olgu $k(n)$ arvu 1998 katvate niisuguste n-kohaliste ($n \geqslant 5$) positiivsete täisarvude arv, mille ükski number ei ole 0. Milline jääk tekib arvu $k(n)$ jagamisel arvuga 8?

Ülesannete lahendused

1. *Vastus:* ainus selline funktsioon on $f(x,y) = \text{VÜK}\,(x,y)$.

   Olgu $z \geqslant 2$ täisarv. Teades väärtusi $f(x,y)$ kõigi x, y jaoks, kus $0 < x,y < z$, saame kolmandast seosest (võttes $y = z - x$) leida väärtuse $f(x,z)$, kus $0 < x < z$. Edasi võime teise seose abil $0 < y < z$ jaoks leida väärtused $f(z,y)$ ning esimesest seosest $f(z,z) = z$. Seega, kui otsitav funktsioon f eksisteerib, on ta üheselt määratud tingimusega $f(1,1) = 1$.

   Veidi katsetades on lihtne jõuda hüpoteesini, et $f(x,y)$ on arvude x ja y vähim ühiskordne. Lahenduse lõpuleviimiseks jääb kontrollida, et see funktsioon tõepoolest rahuldab kõiki kolme tingimust. Esimesed kaks neist kehtivad triviaalselt, kolmanda kehtivus järeldub järgmistest võrdustest:

$$\begin{aligned}(x+y)\cdot \text{VÜK}\,(x,y) &= (x+y)\cdot\frac{xy}{\text{SÜT}\,(x,y)} = y\cdot\frac{x(x+y)}{\text{SÜT}\,(x,x+y)} = \\ &= y\cdot \text{VÜK}\,(x,x+y)\ .\end{aligned}$$

2. Koosinusteoreemist saame, et kolmik (a,b,c) on kvaasi-pythagorase kolmik parajasti siis, kui

$$c^2 = a^2 + ab + b^2\ . \tag{1}$$

   Olgu kõigepealt a ja b ühistegurita ning olgu p arvu c mingi algtegur. Tõestame, et $p > 5$.

   Tingimusest $\text{SÜT}\,(a,b) = 1$ järeldub, et arv $a^2 + ab + b^2$ on paaritu. Järelikult on ka c paaritu ning $p > 2$.

   Oletame, et $p = 3$. Kuna a ja b on ühistegurita, ei jagu vähemalt üks neist (nt. a) arvuga 3. Kirjutame võrrandi (1) ümber kujul

$$4c^2 = (a+2b)^2 + 3a^2\ . \tag{2}$$

   Näeme, et $(a+2b)^2$ jagub 3-ga ning järelikult $a + 2b$ jagub 3-ga ja $(a+2b)^2$ jagub 9-ga. Nüüd jagub võrduse (2) vasak pool 9-ga, parem pool aga mitte. Niisiis peab olema $p > 3$.

   Olgu nüüd $p = 5$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et a ei jagu arvuga 5. Kuna täisruut võib mooduli 5 järgi omada vaid jääke 0, 1 või -1, saame $3a^2 \equiv \pm 3 \pmod 5$. Võrdusest (2) saame siis $(a+2b)^2 \equiv \mp 2 \pmod 5$, vastuolu. Järelikult $p > 5$, mis lõpetab tõestuse juhul, kui $\text{SÜT}\,(a,b) = 1$.

   Kui $\text{SÜT}\,(a,b) = d > 1$, siis saame seosest (1), et d on c jagaja. Olgu $a = da_1$, $b = db_1$ ning $c = dc_1$. Siis $\text{SÜT}\,(a_1,b_1) = 1$ ja $c_1^2 = a_1^2 + a_1b_1 + b_1^2$. Nagu eelpool tõestatud, leidub arvul c_1 algtegur, mis on suurem kui 5. Järelikult on ka arvul $c = dc_1$ sama algtegur.

3. *Vastus:* $x = 14$, $y = 27$.

   Antud võrrandit ümber kirjutades saame $2x^2 - xy + 5y^2 - 10xy = -121$ ning teguriteks lahutades

   $$(2x - y) \cdot (5y - x) = 121 \ .$$

   Mõlemad tegurid peavad ilmselt olema samamärgilised. Kui mõlemad oleksid negatiivsed, saaksime $2x < y < \frac{x}{5}$, vastuolu. Järelikult peame uurima arvu 121 esitust positiivsete tegurite korrutisena. Võimalus $(2x - y, 5y - x) = (1, 121)$ annab lahendi $(x, y) = (14, 27)$. Ülejäänud kaks võimalust ei anna lahendit positiivsetes täisarvudes.

4. Olgu m suvaline täisarv ning $n \in \{1, 2, \ldots, 1998\}$ niisugune, et $m \equiv n \pmod{1998}$. Siis $P(m) \equiv P(n) \pmod{1998}$. Kuna $P(n)$ kolmekohalise täisarvuna ei jagu arvuga 1998, ei saa $P(m)$ olla 0, s.t. polünoomil P pole täisarvulisi juuri.

5. Kui $b = 0$, sobib otsitavaks arvuks $10^n a$. Kui $b \neq 0$, tõestame induktsiooniga n järgi, et otsitava arvu N saab valida koguni n-kohalise.

   Kui $n = 1$, sobib ühekohaline arv b. Edasi olgu meil mingi $n \geqslant 1$ jaoks olemas n-kohaline arv N, mis koosneb vaid numbritest a ja b; muuhulgas siis $N < 10^n$. Defineerime arvu

   $$N^* = \begin{cases} 10^n b + N \,, & \text{kui } N \equiv 0 \pmod{2^{n+1}} \,, \\ 10^n a + N \,, & \text{kui } N \equiv 2^n \pmod{2^{n+1}} \,. \end{cases}$$

   Ilmselt on N^* $(n+1)$-kohaline täisarv, mis rahuldab tingimust

   $$N^* \equiv \begin{cases} 0 + 0 \pmod{2^{n+1}} & \text{esimesel juhul,} \\ 2^n + 2^n \pmod{2^{n+1}} & \text{teisel juhul.} \end{cases}$$

   Mõlemal juhul jagub arv N^* arvuga 2^{n+1}, mis lõpetab induktsiooni sammu.

6. Tähistame $Q(x) = P(x) - P(-x)$. Siis Q on ülimalt 5. astme polünoom, $Q'(0) = 0$ ning

   $$Q(0) = Q(a) = Q(-a) = Q(b) = Q(-b) = 0 \ .$$

   Näeme, et polünoomil Q on viis erinevat reaalarvulist juurt, kusjuures 0 on tema kahekordne juur. Järelikult $Q \equiv 0$ ehk $P(x) = P(-x)$ iga reaalarvu x korral.

7. *Vastus:* ainus selline funktsioon on $f(x) \equiv 0$.

   Valime suvalise reaalarvu x_0 ning tähistame $f(x_0) = c$. Võttes $x = y = x_0$, saame $f(c^2) = 2c$, edasi saame $x = y = c^2$ korral $f(4c^2) = 4c$. Teisest küljest annab vaadeldav võrrand asenduse $x = x_0$ ja $y = 4c^2$ korral $f(4c^2) = 5c$. Järelikult $4c = 5c$ ning $c = 0$. Kuna x_0 oli valitud suvaliselt, peab olema $f \equiv 0$. Samas on lihtne näha, et see funktsioon rahuldab ülesande tingimust.

8. Olgu A ja B vastavalt tõestatava võrduse vasak ja parem pool. Kuna

   $$(1 - x)P_k(x) = 1 - x^k \ ,$$

saame

$$(1-x)\cdot A = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(1-x^k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(1-x^k) = 2^n - (1+x)^n$$

ja

$$\begin{aligned}(1-x)\cdot B &= 2\left(1-\frac{1+x}{2}\right)\cdot 2^{n-1}P_n\left(\frac{1+x}{2}\right) = \\ &= 2^n\left(1-\left(\frac{1+x}{2}\right)^n\right) = 2^n-(1+x)^n\ .\end{aligned}$$

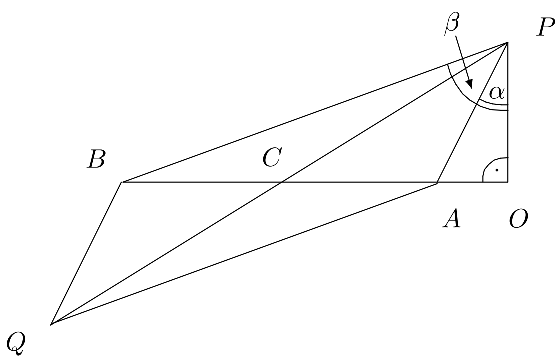
Seega $A = B$ kõigi reaalarvude $x \neq 1$ jaoks. Et A ja B on polünoomid, langevad nad kokku ka $x = 1$ korral.

9. *Lahendus 1.* Funktsioon $f(t) = \sqrt{1+t^2}$ on rangelt kumer piirkonnas $(0,\infty)$, kuna $f''(t) = (1+t^2)^{-3/2} > 0$. Järelikult

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos\gamma} &= \sqrt{1+\tan^2\gamma} = f(\tan\gamma) = f\left(\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{2}\right) < \\ &< \frac{f(\tan\alpha)+f(\tan\beta)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}\right) = \frac{1}{\cos\delta}\ ,\end{aligned}$$

seega $\gamma < \delta$.

Lahendus 2. Olgu OP ühiklõik ning võtame tasandil punktid A ja B sirgest OP samal pool nii, et $\angle POA = \angle POB = 90^\circ$, $\angle OPA = \alpha$ ja $\angle OPB = \beta$ (vt. joonist 1). Siis $|OA| = \tan\alpha$, $|OB| = \tan\beta$, $|PA| = \dfrac{1}{\cos\alpha}$, $|PB| = \dfrac{1}{\cos\beta}$.



Joonis 1

Olgu C lõigu AB keskpunkt.Siis $|OC| = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{2} = \tan\gamma$, seega $\angle OPC = \gamma$ ja $|PC| = \dfrac{1}{\cos\gamma}$.

Olgu punkt Q saadud punkti P peegeldusena punkti C suhtes. Nelinurk $PAQB$ on rööpkülik, järelikult $|AQ| = |PB| = \dfrac{1}{\cos\beta}$. Nüüd saame

$$\frac{2}{\cos\delta} = \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta} = |PA| + |AQ| > |PQ| = 2 \cdot |PC| = \frac{2}{\cos\gamma}\ ,$$

kust $\gamma < \delta$.

10. Lihtsuse mõttes võtame ringjoone pikkuseks $2n(n-1)$. Antud $(n-1)$-nurga tipud $A_0, A_1, \ldots, A_{n-2}$ jagavad ringjoone $n-1$ kaareks pikkusega $2n$. Dirichlet' printsiibi põhjal paiknevad n-nurga tippudest $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$ kaks samal kaarel. Kui vaja, muudame tähistusi nii, et tipud B_0 ja B_1 asuvad kaarel A_0A_1, kusjuures tipp B_0 on lähemal tipule A_0 ja tipp B_1 tipule A_1 ning $|A_0B_0| \leqslant |B_1A_1|$.

Vaatleme ringjoont "rõngasse keeratud" arvtelje lõiguna $[0, 2n(n-1)]$, mille mõlemad otspunktid märgivad tippu A_0, arvud $2n, 4n, 6n, \ldots$ aga märgivad vastavalt tippe $A_1, A_2, A_3, \ldots$.

Olgu $k = 0, 1, \ldots, n-1$ jaoks x_k tipu B_k "koordinaat". Iga kaare B_kB_{k+1} pikkus on $2(n-1)$. Tippude A_0, B_0, B_1 ja A_1 asendi tõttu kehtivad siis tingimused

$$0 \leqslant x_0 < x_1 = x_0 + 2(n-1) \leqslant 2n$$

ning $x_0 - 0 \leqslant 2n - x_1$. Järelikult on $0 \leqslant x_0 \leqslant 1$.

Edasi saame $k = 0, 1, \ldots, n-1$ korral $x_k = x_0 + 2k(n-1)$. On lihtne veenduda, et $(2k-1)n \leqslant x_k \leqslant 2kn$, kui $1 \leqslant k \leqslant \dfrac{n}{2}$, ning $(2k-2)n \leqslant x_k \leqslant (2k-1)n$, kui $\dfrac{n}{2} < k \leqslant n-1$. Tõestuseks piisab asendada $x_k = x_0 + 2k(n-1)$ ning arvestada, et $0 \leqslant x_0 \leqslant 1$.

Kokkuvõttes saime:

1) kui $k \leqslant \dfrac{n}{2}$, siis asub B_k punktide A_{k-1} ja A_k vahel lähemal punktile A_k (koordinaadiga $2kn$); kõnealune kaugus on seega $2kn - x_k = 2k - x_0$;
2) kui $\dfrac{n}{2} < k \leqslant n-1$, siis asub B_k punktide A_{k-1} ja A_k vahel lähemal punktile A_{k-1}; kõnealune kaugus on seega $x_k - (2k-2)n = x_0 - 2k + 2n$;
3) punkti B_0 jaoks on otsitav kaugus x_0.

Nende kauguste summa on seega võrdne avaldise

$$x_0 + \sum_{k=1}^{n/2} (2k - x_0) + \sum_{k=n/2+1}^{n-1} (x_0 - 2k + 2n)$$

väärtusega. Paneme tähele, et toodud avaldises esineb x_0 pooltel juhtudel pluss- ning pooltel juhtudel miinusmärgiga. Seega koonduvad suurused x_0 välja ning summa jääb sõltuma ainult arvust n.

11. *Vastus:* võrdus kehtib, kui $a = b$ või kui kolmnurk on täisnurkne täisnurgaga külje c vastas.

Lahendus 1. Tähistame külgede a, b ja c vastas asuvate nurkade suurusi vastavalt tähtedega A, B ja C. Siis saame siinusteoreemist $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$ ja $c = 2R\sin C$. Tõestatav võrratus on seega samaväärne järgmiste võrratustega:

$$R \geqslant \frac{4R^2(\sin^2 A + \sin^2 B)}{2\sqrt{8R^2(\sin^2 A + \sin^2 B) - 4R^2\sin^2 C}} ,$$

$$2(\sin^2 A + \sin^2 B) - \sin^2 C \geqslant (\sin^2 A + \sin^2 B)^2,$$

$$(\sin^2 A + \sin^2 B)(2 - \sin^2 A - \sin^2 B) \geqslant \sin^2 C ,$$

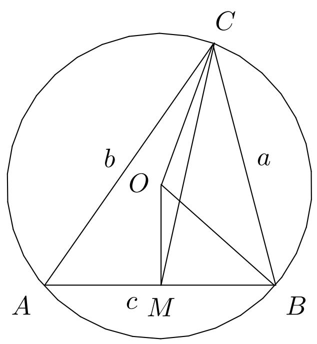
$$(\sin^2 A + \sin^2 B)(\cos^2 A + \cos^2 B) \geqslant \sin^2 C .$$

Viimane võrratus järeldub Cauchy-Schwarzi võrratusest:

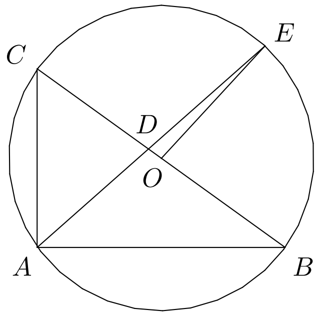
$$(\sin^2 A + \sin^2 B)(\cos^2 B + \cos^2 A) \geqslant$$
$$\geqslant (\sin A \cdot \cos B + \sin B \cdot \cos A)^2 \geqslant \sin^2 C .$$

Võrdus kehtib parajasti siis, kui leidub niisugune reaalarv λ, et $\sin A = \lambda\cos B$ ja $\sin B = \lambda\cos A$. Siit järeldub, et $\lambda > 0$ ning A ja B on teravnurgad. Samuti saame $\sin 2A = \sin 2B$, mis tähendab kas $2A = 2B$ või $2A + 2B = 180^\circ$ ehk $a = b$ või $C = 90^\circ$.

Seega kehtib ülesande võrratuses võrdus, kui $a = b$ või kui kolmnurk on täisnurkne täisnurgaga külje c vastas.



Joonis 2



Joonis 3

Lahendus 2. Tähistagu A, B ja C kolmnurga vastavaid tippe, O tema ümberringjoone keskpunkti ning M külje AB keskpunkti (vt. joonist 2). Küljele c tõmmatud mediaani pikkuse $m_c = |MC|$ võime leida valemist

$$4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2 .$$

Seda valemit kasutades saame tõestatava võrratuse kirjutada kujul $4Rm_c \geqslant a^2+b^2$ ehk $8Rm_c \geqslant 4m_c^2 + c^2$. Viimane on samaväärne võrratusega

$$|m_c - R| \leqslant \sqrt{R^2 - (c/2)^2}$$

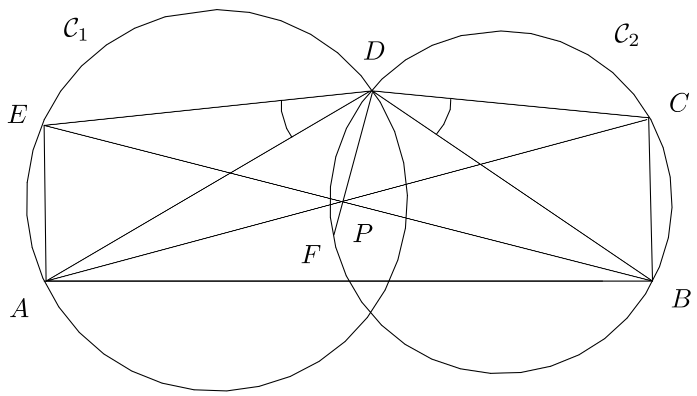
ehk $\big||MC| - |OC|\big| \leqslant |OM|$, mis on kolmnurgavõrratus kolmnurgas COM. Võrdus kehtib, kui punktid C, O ja M asuvad ühel sirgel. See juhtub parajasti siis, kui $a=b$ või $\angle C = 90^\circ$.

12. Olgu O kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt ning E sirge AD teine lõikepunkt sama ringjoonega (vt. joonist 3). Siis $\angle BOE = 2\angle BAE = \angle BDA = \angle CDE$, kust järeldub $|DE| = |OE|$. Kolmnurkade ADC ja BDE sarnasusest saame $\dfrac{|AD|}{|BD|} = \dfrac{|CD|}{|DE|}$ ja $\dfrac{|AD|}{|CD|} = \dfrac{|BD|}{|DE|}$, millest omakorda tuleneb tõestatavaga samaväärne võrdus

$$\frac{|AD|}{|BD|} + \frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|CD|}{|DE|} + \frac{|BD|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|OE|} = 2\,.$$

13. Olgu $\mathcal{C}_1$ ja $\mathcal{C}_2$ vastavalt kolmnurkade AED ja BCD ümberringjooned. Lõigaku sirge DP ringjoont $\mathcal{C}_2$ teistkordselt punktis F (vt. joonist 4).

    Kuna $\angle ADE = \angle BDC$, siis on lõikude EA ja BC pikkuste suhe võrdne ringjoonte $\mathcal{C}_1$ ja $\mathcal{C}_2$ raadiuste suhtega. Järelikult see homoteetne teisendus, mille keskpunkt on P ning mis viib lõigu AE lõiguks CB, viib ka ringjoone $\mathcal{C}_1$ ringjooneks $\mathcal{C}_2$. Sama teisendus viib ka ringjoone $\mathcal{C}_1$ kaare DE ringjoone $\mathcal{C}_2$ kaareks FB. Järelikult $\angle EAD = \angle BDF = \angle BDP$. Teine võrdus tõestatakse analoogiliselt.



Joonis 4

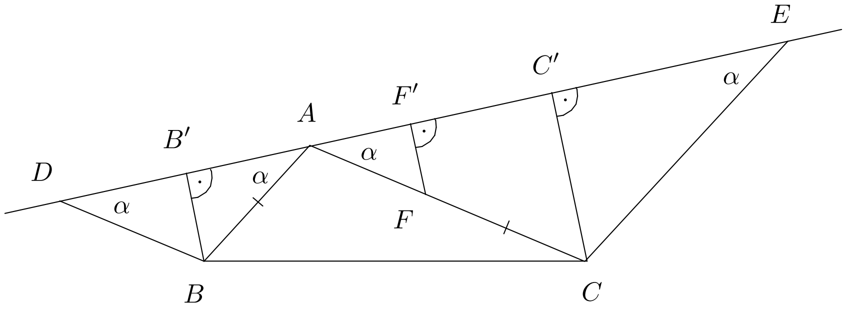
14. Kuna sirged BD ja AC on paralleelsed ning AD on nurga BAC välisnurga poolitaja, saame $\angle BAD = \angle BDA = \alpha$ (vt. joonist 5). Samuti $\angle CAE = \angle CEA = \alpha$ ning $|AB| = |BD|$ ja $|AC| = |CE|$. Olgu B', C' ja F' vastavalt punktidest B, C ja F sirgele DE tõmmatud ristlõikude aluspunktid. Siis

$$|B'F'| = (|AB| + |AF|)\cos\alpha = |AC|\cos\alpha = |AC'| = |C'E|$$

ning

$$|DB'| = |BD|\cos\alpha = |FC|\cos\alpha = |F'C'|\ ,$$

mis annab $|DF'| = |F'E|$ ehk $|DF| = |FE|$.

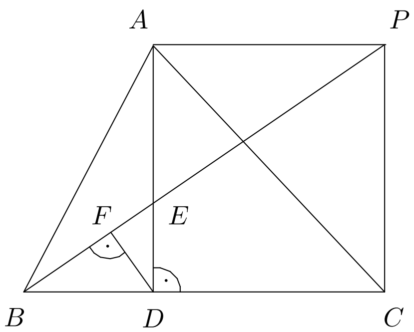


Joonis 5

15. Olgu P niisugune punkt, et nelinurk $ADCP$ osutub ristkülikuks (vt. joonist 6). Siis

$$\frac{|AE|}{|ED|} = \frac{|CD|}{|DB|} = \frac{|AP|}{|DB|}\ ,$$

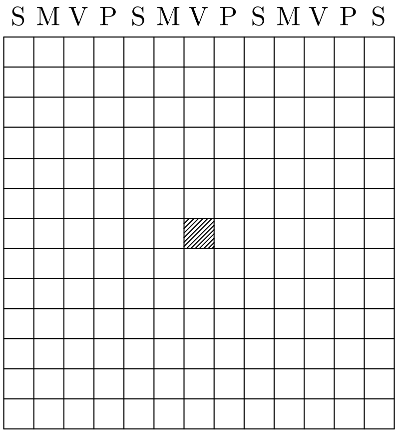
millest järeldub, et punktid B, E ja P asuvad ühel sirgel. Seega $\angle DFP = 90^\circ$ ja järelikult asub punkt F ristküliku $ADCP$ ümberringjoonel. Kuna AC on selle ringjoone diameeter, siis $\angle AFC = 90^\circ$.



Joonis 6

16. *Vastus:* ei saa.

Eesti võistkonna liikme Raido Valgevälja lahendus. Värvime antud ruudustiku ruudud veergude kaupa nelja värviga: 1. veeru ruudud siniseks, 2. veeru ruudud mustaks, 3. veeru ruudud valgeks, 4. veeru ruudud punaseks, 5. veeru ruudud siniseks, 6. veeru ruudud mustaks jne.; keskmise ruudu jätame värvimata (vt. joonist 7). Kokku saame $3\cdot 13 = 39$ musta ja $3\cdot 13 - 1 = 38$ valget ruutu. Kuna iga klots katab kas neli sama värvi ruutu või ühe ruudu igast värvist, peab lõpuks kaetud mustade ja valgete ruutude arvu vahe jaguma arvuga 4. See ei ole ilmselt võimalik, sest $39-38 = 1$ ei jagu arvuga 4. Järelikult ei saa antud ruudustikku 4×1 klotsidega katta.



Joonis 7

17. Juhul $k = 1$ on väite kehtivus ilmne. Vaatleme juhtu $k > 1$. Ilmselt peab leiduma niisugune värv (näiteks roosa), et seda värvi objekte pole rohkem kui n tükki. Samuti leidub selline värv (näiteks hall), et seda värvi objekte pole vähem kui n tükki. Paneme kõik roosad objektid ühte kasti ning täidame kastis ülejäänud ruumi hallide objektidega. Edaspidi jätame selle kasti koos temas sisalduvate objektidega vaatluse alt välja.

    Nii oleme taandanud algse ülesande juhule, kus on antud $k - 1$ kasti ning $k - 1$ värvi objekte. Ülesande väite tõesus järeldub nüüd kergesti induktsiooni abil.

18. *Vastus:* kõik naturaalarvud $n \geqslant 4$.

    Vahetu läbivaatus näitab, et niisugust hulka ei eksisteeri, kui $n = 1, 2, 3$. Juhul $n = 4$ sobib hulk $S = \{3, 5, 6, 7\}$. Kui mingi $n \geqslant 4$ jaoks on olemas nõutud omadustega hulk $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, siis võime $n + 1$ korral võtta hulga $S^* = \{1, 2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_n\}$.

    Järelikult leidub otsitav hulk parajasti kõigi arvude $n \geqslant 4$ jaoks.

19. Teeme kõigepealt järgmise tähelepaneku.

    Kahe (mitte tingimata sama suure) meeskonna matšis leidub vähemalt ühes võistkonnas mängija, kes on võitnud vähemalt pooli vastasvõistkonna mängijaid.

    Tõepoolest, oletame vastuväiteliselt, et see ei pea nii olema. Kui ühes võistkonnas oli m ja teises n liiget, siis võitsid esimese võistkonna mängijad kokku vähem kui $m \cdot \dfrac{n}{2}$ mängu, teise võistkonna mängijad aga kokku vähem kui $n \cdot \dfrac{m}{2}$ mängu. Saime vastuolu, sest mängude üldarv on $m \cdot n$.

    Valime nüüd mängija, kes võitis vähemalt pooli vastasvõistkonna liikmeid, ning märgime ta ära valge mütsiga. Kõik mängijad, keda ta võitis, jätame edasise vaatluse alt välja. Rakendades ülaltoodud tähelepanekut uuesti esimesele (täielikule) ja teisele (koondatud) meeskonnale, leiame järgmise rohkem kui pooli vastaseid võitnud mängija ning anname tallegi valge mütsi, eemaldades talle kaotanud nende võistkonnast.

Sel moel jätkame, kuni üks võistkondadest (nt. Y) saab tühjaks. See tähendab, et võistkonna X valge mütsiga märgitud liikmed ongi otsitav grupp. Tõepoolest: iga võistkonna Y liige kaotas vähemalt ühele neist. Seejuures vähenes iga kord, kui mõni võistkonna X liige sai valge mütsi, võistkonda Y allesjääjate arv vähemalt 2 korda. Kuna algselt kuulus võistkonda Y vähem kui 2^{10} mängijat, ei saa võistkonna X valge mütsiga liikmeid olla rohkem kui 10.

Kui võistkonnast X valiti välja vähem kui 10 liiget, võime nende hulka täiendada suvaliste meeskonnakaaslastega.

20. *Vastus:* 1.

Olgu $1 \leqslant g < h < i < j \leqslant n$ fikseeritud täisarvud. Vaatleme selliseid n-kohalisi täisarve $a = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$, mille kõik numbrid erinevad nullist ning mille korral $a_g = 1$, $a_h = 9$, $a_i = 9$, $a_j = 8$ ja see nelik 1998 on vasakpoolseim, mis katab arvu a, st

$$\begin{cases} a_l \neq 1\,, & \text{kui } l < g\,; \\ a_l \neq 9\,, & \text{kui } g < l < h\,; \\ a_l \neq 9\,, & \text{kui } h < l < i\,; \\ a_l \neq 8\,, & \text{kui } i < l < j\,. \end{cases}$$

Ilmselt on niisuguste arvude arv $k_{ghij}(n) = 8^{g-1} \cdot 8^{h-g-1} \cdot 8^{i-h-1} \cdot 8^{j-i-1} \cdot 9^{n-j}$, mis annab arvuga 8 jagamisel jäägi 1, kui $g = 1$, $h = 2$, $i = 3$ ja $j = 4$; kõigil ülejäänud juhtudel aga jagub see arv arvuga 8. Kuna arv $k(n)$ saadakse kõigi arvude $k_{ghij}(n)$ liitmisel, on otsitav jääk 1.