Matemaatikaolümpiaad "Balti tee '97"

Kopenhaagenis, 9. novembril 1997

1. Leia kõik sellised funktsioonid f reaalarvude hulgast reaalarvude hulka, mis ei võrdu samaselt nulliga ning rahuldavad kõigi reaalarvude x ja y korral tingimust $f(x)f(y) = f(x-y)$.

2. Olgu $a_1, a_2, a_3, \ldots$ mingi positiivsete täisarvude jada, milles iga positiivne täisarv esineb täpselt ühe korra. Tõesta, et leiduvad sellised täisarvud ℓ ja m, $1 < \ell < m$, et $a_1 + a_m = 2a_\ell$.

3. Olgu $x_1 = 1$ ning iga $n = 1, 2, 3, \ldots$ korral $x_{n+1} = x_n + \left\lfloor \frac{x_n}{n} \right\rfloor + 2$, kus $\lfloor x \rfloor$ tähistab suurimat täisarvu, mis ei ületa arvu x. Leia x_{1997}.

4. Tõesta, et arvude $x_1, \ldots, x_n$ aritmeetiline keskmine a rahuldab võrratust
$$(x_1 - a)^2 + \cdots + (x_n - a)^2 \leqslant \frac{1}{2}(|x_1 - a| + \cdots + |x_n - a|)^2 .$$

5. Positiivsete täisarvude jadas $u_0, u_1, \ldots$ olgu u_0 vabalt valitud arv ning iga mittenegatiivse täisarvu n korral kehtigu
$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}u_n & \text{paarisarvulise } u_n \text{ korral,} \\ a + u_n & \text{paaritu } u_n \text{ korral,} \end{cases}$$
kus a on fikseeritud positiivne paaritu arv. Tõesta, et see jada on mingist kohast alates perioodiline.

6. Leia kõik mittenegatiivsete täisarvude kolmikud (a, b, c), mille korral $a \geqslant b \geqslant c$ ja $1 \cdot a^3 + 9 \cdot b^2 + 9 \cdot c + 7 = 1997$.

7. Olgu P ja Q täisarvuliste kordajatega polünoomid, kusjuures täisarvud a ja $a + 1997$ on polünoomi P nullkohtadeks ning $Q(1998) = 2000$. Tõesta, et võrrandil $Q(P(x)) = 1$ pole täisarvulisi lahendeid.

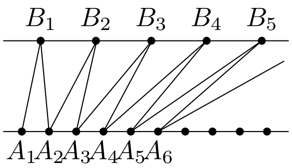
8. Liites arvud 1996 ja 1997, liidame me kõigepealt üheliste numbrid 6 ja 7. Saades tulemuseks 13, kirjutame me üheliste kohale numbri 3 ja "kanname" 1 üle järgmisele kohale. Sellega teeme me *ülekande*. Kokku tuleb teha kolm ülekannet:
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1\,1\;\;} \\ 1\,9\,9\,6 \\ +\ 1\,9\,9\,7 \\ \hline 3\,9\,9\,3 \end{array}$$
Kas leidub selline positiivne täisarv k, et arvude $1996 \cdot k$ ja $1997 \cdot k$ liitmisel ei tule teha ühtegi ülekannet?

9. Maailmad Universumis on nummerdatud arvudega 1, 2, 3, ... ja ühendatud nii, et iga täisarvu $n \geqslant 1$ korral saab võlur Gandalf liikuda ükskõik millises suunas maailmade n, $2n$ ja $3n+1$ vahel. Kas Gandalf saab suvalisest maailmast oma rännakut alustades jõuda igasse teise maailma?

10. Tõesta, et mistahes 79 järjestikuse positiivse täisarvu hulgas leidub arv, mille kümnendesituse numbrite summa jagub 13-ga.

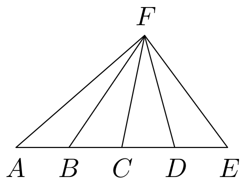
11. Paralleelsetel sirgetel on vastavalt märgitud erinevad punktid $A_1, A_2, A_3, \ldots$ ning $B_1, B_2, B_3, \ldots$ nii, et $|A_iA_{i+1}| = 1$ ja $|B_iB_{i+1}| = 2$ iga $i = 1, 2, \ldots$ korral (vt. joonist). Olgu $\angle A_1A_2B_1 = \alpha$. Leia järgmise lõpmatu summa väärtus:

$$\angle A_1B_1A_2 + \angle A_2B_2A_3 + \angle A_3B_3A_4 + \ldots .$$



12. Ringjooned $\mathcal{C}_1$ ja $\mathcal{C}_2$ lõikuvad punktides P ja Q. Läbi punkti P tõmmatud sirge lõikab ringjooni $\mathcal{C}_1$ ja $\mathcal{C}_2$ teist korda vastavalt punktides A ja B ning lõigu AB keskpunkt on X. Läbi punktide Q ja X joonestatud sirge lõikab ringjooni $\mathcal{C}_1$ ja $\mathcal{C}_2$ teist korda vastavalt punktides Y ja Z. Tõesta, et X on lõigu YZ keskpunkt.

13. Viis erinevat punkti A, B, C, D ja E asuvad ühel sirgel nii, et $|AB| = |BC| = |CD| = |DE|$. Punkt F asub väljaspool seda sirget. Olgu G kolmnurga ADF ümberringjoone keskpunkt ja H kolmnurga BEF ümberringjoone keskpunkt. Näita, et sirged GH ja FC on risti.



14. Kolmnurgas ABC on arv $|AC|^2$ arvude $|BC|^2$ ja $|AB|^2$ aritmeetiline keskmine. Näita, et $\cot^2 B \geqslant \cot A \cot C$.

15. Teravnurkse kolmnurga ABC nurkade $\angle A$, $\angle B$ ja $\angle C$ poolitajad lõikavad kolmnurga ümberringjoont teist korda vastavalt punktides A_1, B_1 ja C_1. Olgu M lõikude AB ja B_1C_1 lõikepunkt ning N lõikude BC ja A_1B_1 lõikepunkt. Tõesta, et lõik MN läbib kolmnurga $\triangle ABC$ siseringjoone keskpunkti.

16. Kaks mängijat mängivad 5×5 malelaual järgmist mängu. Esimene mängija asetab maleratsu mingile ruudule. Seejärel teevad mängijad kordamööda ratsuga malereeglitele vastavaid käike, kusjuures esimese käigu teeb teine mängija. Ruudule, kus ratsu on juba viibinud, ei ole lubatud enam käia. Mängija, kes ei saa käiku teha, kaotab. Kummal mängijatest on võitev strateegia?

17. Ristküliku saab jagada n võrdseks ruuduks. Sama ristküliku saab jagada ka $n+76$ võrdseks ruuduks. Leia n.

18. a) Tõesta, et leiduvad kaks lõpmatut mittenegatiivsete täisarvude hulka A ja B (need ei tarvitse olla ühisosata), nii et iga mittenegatiivne täisarv n on ühel ja ainult ühel viisil esitatav kujul $n = a + b$, kus $a \in A$, $b \in B$.

    b) Tõesta, et iga niisuguse paari (A, B) korral sisaldab üks hulkadest A ja B ainult mingi täisarvu $k > 1$ kordseid.

19. Metsas elavad n looma ($n \geqslant 3$) igaüks oma urus ning iga kaht urgu ühendab täpselt üks rada. Metsakuninga valimise eel teevad mõned loomad valimiskampaaniat. Iga kampaaniat tegev loom külastab iga teise looma urgu täpselt korra, liigub urust urgu ainult mööda radu, ei pööra urgude vahel kusagil ühelt rajalt teisele ning pöördub lõpuks oma urgu tagasi. Samuti on teada, et iga rada kasutab ülimalt üks kampaaniat tegev loom.

    a) Tõesta, et iga algarvulise n korral on kampaaniat tegevate loomade suurim võimalik arv $\dfrac{n-1}{2}$;

    b) Leia kampaaniat tegevate loomade suurim võimalik arv, kui $n = 9$.

20. Laual on reas kaksteist kaarti. Kaarte võib olla kolme liiki: kahe valge küljega, kahe musta küljega või ühe valge ja ühe musta küljega. Algul on kaheteistkümnest kaardist üheksal must külg ülalpool. Pärast kaartide 1–6 ümberpööramist on neljal kaardil kaheteistkümnest must külg ülalpool. Järgmisena pööratakse ümber kaardid 4–9, mille järel on kuuel kaardil must külg ülalpool. Lõpuks pööratakse ümber kaardid 1–3 ja 10–12 ning nüüd on viiel kaardil must külg ülalpool. Kui palju on iga liiki kaarte?

Ülesannete lahendused

1. *Vastus*: $x \equiv 1$ on ainus selline funktsioon.

   Et funktsioon f ei võrdu samaselt nulliga, siis leidub niisugune reaalarv x_0, et $f(x_0) \neq 0$. Võrdusest $f(x_0)f(0) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$ saame $f(0) = 1$ ning võrdusest $\big(f(x)\big)^2 = f(x)f(x) = f(x-x) = f(0)$ saame, et $f(x) \neq 0$ mistahes reaalarvu x korral. Lõpuks leiame võrdusest $f(x)f\left(\dfrac{x}{2}\right) = f\left(x - \dfrac{x}{2}\right) = f\left(\dfrac{x}{2}\right)$, et $f(x) = 1$ iga reaalarvu x korral.

2. Olgu ℓ vähim selline indeks, et $a_\ell > a_1$. Kuna $2a_\ell - a_1$ on suurem nii arvust a_1 kui ka arvust a_ℓ, siis esineb ta vaadeldavas jadas arvust a_ℓ tagapool, s.t. leidub niisugune indeks $m > \ell$, et $a_m = 2a_\ell - a_1$ ehk $a_1 + a_m = 2a_\ell$.

3. *Vastus*: $x_{1997} = 23913$.

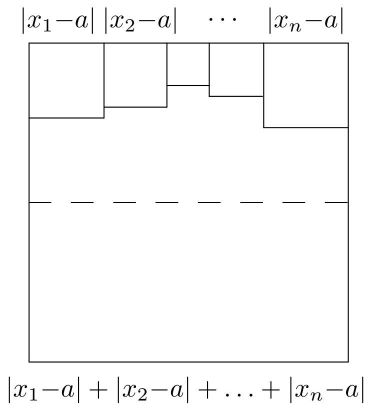
   Kirjutame arvu x_n kujul $x_n = an + b$, kus $0 \leqslant b < n$, siis

   $$x_{n+1} = x_n + a + 2 = a(n+1) + b + 2\,.$$

   Niisiis, kui mingi naturaalarvu N korral $x_N = AN$, siis $x_{N+i} = A(N+i) + 2i$ iga $i = 0, 1, \ldots, N$ korral ning muuhulgas $x_{2N} = (A+1) \cdot 2N$. Võttes $N = 1$, saame $x_1 = 1 = 1 \cdot 1$, s.t. $A = 1$ ning seega mistahes $k \geqslant 0$ korral saame $N = 2^k$ jaoks $A = k + 1$, s.t. $x_{2^k} = (k+1) \cdot 2^k$. Võttes nüüd $N = 2^{10} = 1024$, leiame $A = 11$ ning $x_{1997} = x_{1024+973} = 11 \cdot 1997 + 2 \cdot 973 = 23913$.

4. *Lahendus 1*: Tähistame $y_i = x_i - a$, siis $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 0$ ning üldisust kitsendamata võime eeldada, et $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_k \leqslant 0 \leqslant y_{k+1} \leqslant \ldots \leqslant y_n$. Olgu $y_1 + y_2 + \ldots + y_k = -z$, siis $y_{k+1} + \ldots + y_n = z$ ning

   $$\begin{aligned} y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 &= y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_k^2 + y_{k+1}^2 + \ldots + y_n^2 \leqslant \\ &\leqslant (y_1 + y_2 + \ldots + y_k)^2 + (y_{k+1} + \ldots + y_n)^2 = 2z^2 = \\ &= \frac{1}{2}(2z)^2 = \frac{1}{2}\left(|y_1| + |y_2| + \ldots + |y_n|\right)^2\,. \end{aligned}$$



Joonis 1

Lahendus 2: (Läti) Juht $n = 1$ on triviaalne (siis $x_1 - a = 0$ ja saame võrratuse $0 \leqslant 0$). Olgu nüüd $n \geqslant 2$, siis vaatleme ruutu küljepikkusega $|x_1 - a| + |x_2 - a| + \ldots + |x_n - a|$ ja konstrueerime selle ülemisse serva üksteise kõrvale ruudud küljepikkustega $|x_1 - a|$, $|x_2 – a|, \ldots, |x_n – a|$ (vt. joonist 1). Et ühegi väikese ruudu küljepikkus ei saa ületada poolt suure ruudu küljepikkusest (miks?), siis sisalduvad kõik väikesed ruudud suure ruudu ülemises pooles, s.t. nende pindalade summa ei ületa poolt suure ruudu pindalast, mida oligi tarvis tõestada.

5. Et jada iga liige on üheselt määratud talle eelneva liikmega, siis piisab näidata, et selles jadas leidub kaks võrdset liiget (nende liikmete vaheline jada lõik hakkab siis perioodiliselt korduma). Veendume kõigepealt, et jadas leidub liige, mis ei ületa arvu a. Tõepoolest, olgu $u_n > a$, siis paarisarvulise u_n korral saame $u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n < u_n$ ning paaritu u_n korral $u_{n+1} = a + u_n < 2u_n$ ja $u_{n+2} = \dfrac{1}{2} u_{n+1} < u_n$. Niiviisi jätkates jõuame lõpliku arvu sammude järel liikmeni u_k, mis rahuldab tingimust $u_k \leqslant a$.

   Näitame nüüd, et vähemalt üks jada kahest järgmisest liikmest u_{k+1} ja u_{k+2} ei ületa jällegi arvu a. Tõepoolest, paarisarvulise u_k korral $u_{k+1} = \dfrac{1}{2} u_k < u_k \leqslant a$ ning paaritu u_k korral $u_{k+1} = a + u_k \leqslant 2a$ ja $u_{k+2} = \dfrac{1}{2} u_{k+1} \leqslant a$. Seega on jadas lõpmata palju liikmeid, mis ei ületa arvu a, ning need liikmed ei saa olla kõik erinevad.

6. Ülesande tingimustest saame $a^3 + 9b^2 + 9c = 1990 \equiv 1 \pmod 9$, seega $a^3 \equiv 1 \pmod 9$ ning $a \equiv 1 \pmod 3$. Et $13^3 = 2197 > 1990$, siis on a võimalikud väärtused $1, 4, 7, 10$. Teisalt, kui $a \leqslant 7$, siis tingimuse $a \geqslant b \geqslant c$ tõttu saame $a^3 + 9b^2 + 9c^2 \leqslant 7^3 + 9 \cdot 7^2 + 9 \cdot 7 = 847 < 1990$ ning seega jääb ainsaks võimaluseks $a = 10$. Nüüd saame $9b^2 + 9c = 990$ ja $c \leqslant b \leqslant 10$, kust $c = b = 10$.

7. Polünoom P esitub kujul $P(x) = (x - a)(x - a - 1997)R(x)$, kus $R(x)$ on mingi täisarvuliste kordajatega polünoom. Mistahes täisarvu b korral on täisarvud $b - a$ ja $b - a - 1997$ erineva paarsusega ning $P(b) = (b - a)(b - a - 1997)R(b)$ seega paarisarv. Et $Q(1998) = 2000$, siis on polünoomi Q vabaliige paarisarv (vastasel korral oleks $Q(x)$ väärtus mistahes paarisarvulise x korral paaritu arv). Seega on ka $Q(P(b))$ paarisarv ega saa olla võrdne arvuga 1.

8. *Vastus*: jah, selline arv leidub.

   Lahendus 1: Paneme kõigepealt tähele, et kui kahe täisarvu liitmisel saadav summa koosneb ainult numbritest 9, siis ei esine liitmise käigus ühtegi ülekannet. Seega piisab näidata, et leidub niisugune täisarv k, et $3993 \cdot k = 999\ldots9$.

   Vaatleme esimest 3994 arvu, mis koosnevad ainult numbritest 9:

$$9,\ 99,\ 999,\ \ldots,\ \underbrace{999\ldots9}_{3994 \text{ üheksat}}\ .$$

   Nende seas leiduvad kaks sellist, mis annavad arvuga 3993 jagamisel sama jäägi, ning nende kahe arvu vahe

$$\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ üheksat}}\underbrace{00\ldots0}_{r \text{ nulli}} = \underbrace{99\ldots9}_{n} \cdot 10^r$$

jagub arvuga 3993. Et SÜT $(3993, 10) = 1$, siis jagub ka arv $\underbrace{99\ldots9}_{n}$ arvuga 3993.

Lahendus 2: (Eesti) Samuti nagu eelmises lahenduses on meie eesmärgiks näidata, et leidub niisugune ainult numbritest 9 koosnev arv, mis jagub arvuga 3993. Et SÜT $(10, 11^3) = 1$, siis vastavalt Euleri teoreemile jagub arv $10^{\varphi(11^3)} - 1$ arvuga 11^3 (siin $\varphi(n)$ tähistab *Euleri funktsiooni*, $\varphi(11^3) = 11^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{11}\right) = 1210$). Seega jagub arv $\underbrace{99\ldots9}_{1210}$ arvuga $11^3 = 1331$ ning järelikult ka arvuga 3993.

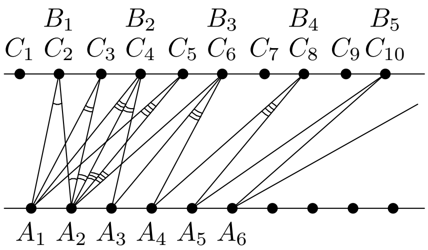
9. *Vastus*: jah, saab.

   Et mistahes kahe maailma korral saab Gandalf nende vahel liikuda kas mõlemas või mitte kummaski suunas, siis piisab näidata, et Gandalf pääseb suvalise numbriga n maailmast maailma numbriga 1. Selleks omakorda piisab, kui ta saab alati liikuda maailmast numbriga n mingisse väiksema numbriga maailma. Vaatleme eraldi kolme juhtu:

   Kui $n = 3k + 1$, siis saab Gandalf maailmast n otse liikuda maailma $k < n$.
   Kui $n = 3k + 2$, siis saab Gandalf maailmast n liikuda maailma $2n = 6k + 4 = 3 \cdot (2k + 1) + 1$ ja sealt maailma $2k + 1 < n$.
   Kui $n = 3k$, siis saab Gandalf maailmast n liikuda maailma $3n + 1 = 9k + 1$, edasi maailmadesse $2 \cdot (9k + 1) = 18k + 2$ ja $2 \cdot (18k + 2) = 36k + 4 = 3 \cdot (12k + 1) + 1$ ning sealt omakorda maailmadesse $12k + 1$, $4k$ ja $2k < n$.

10. Mistahes 79 järjestikusest naturaalarvust esimese 40 hulgas leiduvad neli niisugust, mille viimane number on 0, ning vähemalt ühel neist on eelviimane number ülimalt 6. Olgu x selline arv ja y arvu x numbrite aumma, siis arvud x, $x+1$, $x+2$, $\ldots$, $x+39$ on kõik valitud 79 arvu seas ning nende numbrite summade hulgas esinevad vähemalt korra arvud y, $y+1$, $\ldots$, $y+12$. Üks neist 13 järjestikusest arvust jagub arvuga 13.

    Märkus: leidub 78 järjestikust naturaalarvu, millest ükski ei jagu arvuga 13 — sellised on näiteks arvud 859999999961 kuni 860000000038.



Joonis 2

11. *Vastus*: $\pi - \alpha$.

    Võtame ülemisel sirgel punktid $C_1, C_2, C_3, \ldots$ nii, et $|C_iC_{i+1}| = 1$ ja $B_i = C_{2i}$ iga $i = 1, 2, \ldots$ korral (vt. joonist 2). Siis mistahes $i = 1, 2, \ldots$ korral saame $\angle A_iB_iA_{i+1} = \angle A_iC_{2i}A_{i+1} = \angle A_1C_{i+1}A_2 = \angle C_{i+1}A_2C_{i+2}$. Seega

$$\begin{aligned}&\angle A_1B_1A_2 + \angle A_2B_2A_3 + \angle A_3B_3A_4 + \ldots = \\ &\quad = \angle C_2A_2C_3 + \angle C_3A_2C_4 + \angle C_4A_2C_5 + \ldots = \pi - \alpha\,.\end{aligned}$$

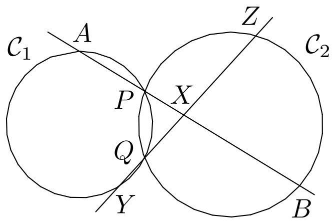
12. Olenevalt ringjoonte raadiustest, nende keskpunktide vahekaugusest ja punkti P läbiva sirge valikust on punktide A, B, P ja Y, Z, Q paiknemiseks mitu võimalust. Näitame, et igal juhul on kolmnurgad AXY ja BXZ kongruentsed, mistõttu $|YX| = |XZ|$.

   (a) Punkt P paikneb lõigul AB ja punkt Q paikneb lõigul YZ (vt. joonist 3). Siis $\angle AYX = \angle AYQ = \pi - \angle APQ = \angle BPQ = \angle BZQ = \angle BZX$. Et ka $\angle AXY = \angle BXZ$ ning $|AX| = |XB|$, siis on kolmnurgad AXY ja BXZ kongruentsed.

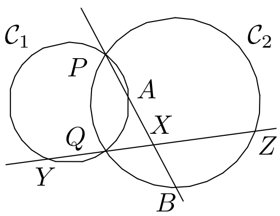
   (b) Punkt P paikneb väljaspool lõiku AB ja punkt Q paikneb lõigul YZ (vt. joonist 4). Siis $\angle AYX = \angle AYQ = \angle APQ = \angle BPQ = \angle BZQ = \angle BZX$.

   (c) Punkt P paikneb väljaspool lõiku AB ja punkt Q paikneb väljaspool lõiku YZ (vt. joonist 5). Siis $\angle AYX = \pi - \angle AYQ = \angle APQ = \angle BPQ = \angle BZQ = \angle BZX$.

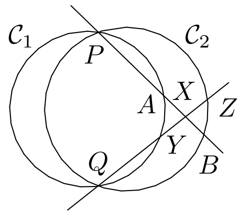
   (d) Punkt P paikneb lõigul AB ja punkt Q paikneb väljaspool lõiku YZ. See juht on analoogiline juhuga (b): vahetame punktide P ja Q, A ja Y ning B ja Z rollid.



Joonis 3

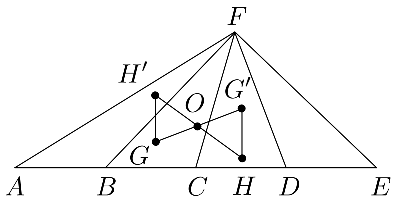


Joonis 4



Joonis 5

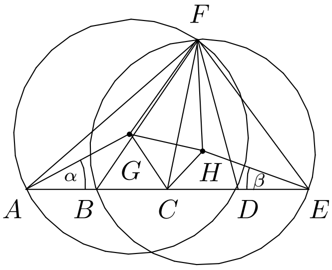
13. *Lahendus 1*: Olgu O, G' ja H' vastavalt kolmnurkade BDF, DCF ja BCF ümberringjoonte keskpunktid (vt. joonist 6). Punktid O, G ja G' paiknevad kõik lõigu DF keskristsirgel ning punktid O, H ja H' paiknevad lõigu BF keskristsirgel. Et lisaks sellele paiknevad punktid G ja H' lõigu BC keskristsirgel, punkt O lõigu BD keskristsirgel ning punktid G' ja H lõigu CD keskristsirgel, kusjuures C on lõigu BD keskpunkt, siis on punktid G' ja H' vastavalt punktide G ja H peegeldusteks punkti O suhtes. Nelinurk $GHG'H'$ on seega rööpkülik, mille diagonaalid GG' ja HH' lõikuvad punktis O. Kuna kolmnurkade DCF ja BCF ümberringjoonte keskpunkte ühendav lõik $G'H'$ on risti lõiguga CF, siis on sellega risti ka paralleelne lõik GH.



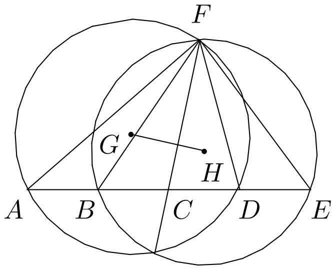
Joonis 6

Lahendus 2: (Eesti) Paneme tähele, et nelinurga $XYZW$ diagonaalid on risti siis ja ainult siis, kui $|XY|^2 - |ZY|^2 = |XW|^2 - |ZW|^2$. (Miks?) Rakendades seda nelinurgale $GFHC$ näeme, et meil piisab tõestada võrdus $|GF|^2 - |HF|^2 = |GC|^2 - |HC|^2$.

Olgu $|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = a$, $\angle GAC = \alpha$ ja $\angle HEC = \beta$ ning olgu R_1 ja R_2 vastavalt kolmnurkade ADF ja BEF ümberringjoonte raadiused (vt. joonist 7). Rakendades koosinusteoreemi kolmnurkadele CGA ja CHE, leiame $|GC|^2 = R_1^2 + 4a^2 - 4aR_1 \cos\alpha$ ja $|HC|^2 = R_2^2 + 4a^2 - 4aR_2 \cos\beta$. Arvestades võrdusi $\cos\alpha = \dfrac{3a}{2R_1}$ ja $\cos\beta = \dfrac{3a}{2R_2}$, saame $|GC|^2 - |HC|^2 = R_1^2 - R_2^2$. Teisalt aga $|GF| = R_1$ ja $|HF| = R_2$ ning seega ka $|GF|^2 - |HF|^2 = R_1^2 - R_2^2$.



Joonis 7



Joonis 8

Lahendus 3: (Poola) Kasutame järgmist tuntud fakti (tõesta see!): *Lõigaku sirge s kaht ringjoont vastavalt punktides K, L ja M, N ning lõikugu need ringjooned punktides P ja Q. Sirgel s paiknev punkt X asub sirgel PQ (s.t. on sirgete s ja PQ lõikepunkt) parajasti siis, kui $|KX| \cdot |LX| = |MX| \cdot |NX|$.*

Sirge AE lõikab kolmnurga ADF ümberringjoont punktides A ja D ning kolmnurga BEF ümberringjoont punktides B ja E. Kuna punkt C paikneb sellel sirgel ja $|AC| \cdot |DC| = |BC| \cdot |EC|$, siis läbib sirge CF ka nende ringjoonte teist lõikepunkti (vt. joonist 8) ning on seega risti nende ringjoonte keskpunkte ühendava lõiguga GH.

14. Olgu $|BC| = a$, $|CA| = b$ ja $|AB| = c$, siis ülesande tingimusest saame $2b^2 = a^2 + b^2$. Koosinus- ja siinusteoreemist kolmnurgas ABC leiame:

$$\begin{aligned}
\cot B &= \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{(a^2 + c^2 - b^2) \cdot 2R}{2ac \cdot b} = \frac{(a^2 + c^2 - b^2) \cdot R}{abc}\,, \\
\cot A &= \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{(b^2 + c^2 - a^2) \cdot R}{abc}\,, \\
\cot C &= \frac{\cos C}{\sin C} = \frac{(a^2 + b^2 - c^2) \cdot R}{abc}\,,
\end{aligned}$$

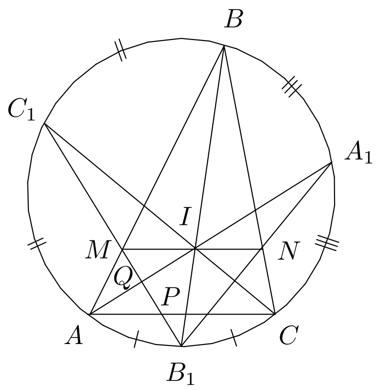
kus R on kolmnurga ABC ümberringjoone raadius. Tõestuse lõpetamiseks piisab niisiis näidata, et $(a^2 + c^2 - b^2)^2 \geqslant (b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + b^2 - c^2)$. Tõepoolest, aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest saame

$$\begin{aligned}
(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + b^2 - c^2) &\leqslant \frac{(b^2 + c^2 - a^2 + a^2 + b^2 - c^2)^2}{4} = b^4 = \\
&= (2b^2 - b^2)^2 = (a^2 + c^2 - b^2)^2\,.
\end{aligned}$$

15. Olgu I kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkt (nurgapoolitajate AA_1, BB_1 ja CC_1 lõikepunkt) ning olgu P ja Q lõigu B_1C_1 lõikepunktid vastavalt kolmnurga küljega AC ja nurgapoolitajaga AA_1 (vt. joonist 9). Siis

$$\angle AQC_1 = \frac{1}{2}\,(\overset{\frown}{AC_1} + \overset{\frown}{A_1B_1}) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{CA}\right) = 90^\circ\ .$$

(Miks?) Et $\angle AC_1B_1 = \angle B_1C_1C$ (võrdsetele kaartele toetuvad võrdsed piirdenurgad), siis on C_1B_1 nurga $\angle AC_1I$ poolitaja, ning kuna lõigud AI ja C_1B_1 on risti, siis ühtlasi ka nurga $\angle AMI$ poolitaja. Samuti veendume, et B_1C_1 poolitab nurgad $\angle AB_1I$ ja $\angle API$. Seega on nelinurga $AMIP$ diagonaalid risti ja poolitavad selle nelinurga nurgad, s.t. $AMIP$ on romb ja lõik MI on paralleelne lõiguga AC. Analoogiliselt tõestame, et lõik NI on paralleelne lõiguga AC, s.t. punktid M, I ja N paiknevad ühel sirgel, mida oligi tarvis tõestada.



Joonis 9

16. *Vastus*: võitev strateegia on esimesel mängijal.

Lahendus 1: Jaotame mängulaua kõik ruudud peale ühe paarideks, nii et ühte paari kuuluvad ruudud on teineteisest täpselt ratsukäigu kaugusel (joonisel 10 on ühte paari kuuluvad ruudud tähistatud sama arvuga; paaridest üle jääv ruut on märgitud tähega X). Kui alustaja paigutab ratsu avakäigul ruudule X ja edaspidi käib alati sama tähisega ruudule kui see, kus ratsu enne tema käiku seisab, siis ei saa tal käigupuudust tekkida.

Lahendus 2: (Eesti) Kui alustaja paigutab avakäigul ratsu joonisel 11 arvuga 1 tähistatud ruudule, siis teisel mängijal on kaks võimalikku käiku, mis on sümmeetrilised mängulaua diagonaali suhtes: üldisust kitsendamata võime eeldada, et ta käib ruudule 2. Edasi käib alustaja ruudule 3, mispeale teine mängija saab käia ainult ruudule 4; alustaja käib seejärel ruudule 5 ning teise mängija ainus võimalik käik on ruudule 6 jne., kuni alustaja käiguni arvuga 9 märgitud ruudule. Siin on teisel mängijal jälle kaks võimalust käiguks, kuid kuna need (ja samuti juba kasutatud ruudud) on sümmeetrilised mängulaua diagonaali suhtes, siis võime üldisust kitsendamata eeldada, et ta käib joonisel 12 numbriga 10 märgitud ruudule. Seepeale saab alustaja jälle kuni mängu lõpuni teha käike nii, et teisel mängijal on igaks vastukäiguks üksainus võimalus: need ruudud on joonisel 12 käikude järjekorras tähistatud arvudega 11 kuni 25.

X	12	8	3	11
5	3	11	1	7
12	8	6	10	4
2	5	9	7	1
9	6	2	4	10

Joonis 10

7				1
		8		
	6		2	
		4	9	
5				3

Joonis 11

7	12	23	18	1
22	17	8	13	24
11	6	25	2	19
16	21	4	9	14
5	10	15	20	3

Joonis 12

17. *Vastus*: $n = 324$.

Paiknegu ristküliku n ruuduks jagamisel ühes suunas a ja teises b ruutu ning $n + 76$ ruuduks jagamisel vastavalt ühes suunas c ja teises d ruutu. Siis $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, ehk $ad = bc$.

Olgu $u = \text{SÜT}\,(a, c)$ ja $v = \text{SÜT}\,(b, d)$, siis leiduvad niisugused positiivsed täisarvud x ja y, et $\text{SÜT}\,(x, y) = 1$, $a = ux$, $c = uy$ ning $b = vx$, $d = vy$. Niisiis saame võrduse

$$cd - ab = uv(y^2 - x^2) = uv(y - x)(y + x) = 76 = 2^2 \cdot 19 .$$

Et $y-x$ ja $y+x$ on sama paarsusega positiivsed täisarvud ja $\text{SÜT}\,(x, y) = 1$, siis saame ainsa võimalusena $y - x = 1$ ja $y + x = 19$, kust $y = 10$, $x = 9$ ja $uv = 4$. Siit leiame $n = ab = x^2uv = 324$.

18. a) Sisaldagu hulk A arvu 0 ja kõik niisugused positiivsed täisarvud, mille kümnendesituses nullist erinevad numbrid esinevad ainult paremalt lugedes paarisnumbritega kohtadel, hulk B aga arvu 0 ja kõik niisugused positiivsed täisarvud, mille kümnendesituses nullist erinevad numbrid esinevad ainult paremalt lugedes paaritute numbritega kohtadel. On ilmne, et mistahes mittenegatiivne täisarv esitub parajasti ühel viisil hulka A kuuluva arvu ja hulka B kuuluva arvu summana.

b) On selge, et arv 0 peab sisalduma nii hulgas A kui ka hulgas B (vastasel korral ei oleks vastavalt vähimal hulka B või hulka A kuuluval arvul nõutavat esitust). Paneme ka tähele, et arv 1 sisaldub kindlasti hulgas A või hulgas B, kuid mitte mõlemas (miks?) — üldisust kitsendamata eeldame, et $1 \in A$.

Olgu k vähim positiivne täisarv, mis ei sisaldu hulgas A, siis peab ilmselt olema $k \in B$. (Miks?) Tõestame nüüd, et hulk B koosneb ainult arvu k kordsetest.

Hulk A esitub paarikaupa lõikumatute alamhulkade ühendina:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots ,$$

kus iga alamhulk A_i koosneb järjestikustest täisarvudest ning alamhulga A_i suurima arvu ja alamhulga A_{i+1} vähima arvu vahel on vähemalt üks hulka A mittekuuluv täisarv. Muuhulgas $A_1 = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Vastavalt ülesande tingimustele peab kõikide mittenegatiivsete täisarvude hulk $\mathbb{N}_0$ esituma paarikaupa lõikumatute alamhulkade $A_i + y_j = \{x + y_j \mid x \in A_i\}$ ühendina, kus $B = \{y_1 = 0, y_2, \ldots, y_n, \ldots\}$. Näitame, et iga alamhulk A_i sisaldab täpselt k elementi. Tõepoolest, olgu m vähim selline indeks, et $|A_m| = l \neq k$ (vastavalt ülalpool tõestatule $m \geqslant 2$). Et alamhulgad $A_m + 0$ ja $A_m + k$

omavahel ei lõikuks, peab olema $l < k$. Siis peab aga hulkade $A_m + 0$ ja $A_m + k$ vahel vahetult alamhulga $A_m + 0$ järel paiknema mingi hulk $A_n + y$, kus $y \in B$. Seejuures $n > m$, sest hulk $A_n + y$ sisaldab vähem kui k elementi, mistõttu ainsa võimalusena $y = 0$. (Miks?) See on aga vastuolus tingimusega, mille kohaselt hulga A_m suurima elemendi ja hulga A_n vähima elemendi vahel peab olema vähemalt üks hulka A mittekuuluv täisarv.

Niisiis oleme tõestanud, et kõikide mittenegatiivsete täisarvude hulk $\mathbb{N}_0$ esitub paarikaupa lõikumatute alamhulkade $A_i + y_j$ ühendina, kus $B = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\}$ ning iga alamhulk $A_i + y_j$ on täpselt k-elemendiline. Seega on iga alamhulga $A_i + y_j$ esimene element arvu k kordne — muuhulgas on see nii ka alamhulkade $A_1 + y_j$ korral, mille esimesed elemendid y_j moodustavad hulga B.

19. *Vastus*: b) 4.

a) Kuna iga kampaaniat tegev loom kasutab täpselt n rada, iga rada kasutab ülimalt üks selline loom ja radade koguarv on $\dfrac{n(n-1)}{2}$, ei saa kampaaniat tegevaid loomi olla rohkem kui $\dfrac{n-1}{2}$. Nummerdame urud täisarvudega 0, 1, 2, …, $n-1$, siis algarvulise n korral saame konstrueerida $\dfrac{n-1}{2}$ omavahel mittelõikuvat kampaaniaringkäigu marsruuti järgmiselt:

$$
\begin{aligned}
&0 \to 1 \to 2 \to 3 \to \ldots \to n \to 0\,;\\
&0 \to 2 \to 4 \to 6 \to \ldots \to n-1 \to 0\,;\\
&0 \to 3 \to 6 \to 9 \to \ldots \to n-2 \to 0\,;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&0 \to \frac{n-1}{2} \to n-1 \to \ldots \to \frac{n+1}{2} \to 0
\end{aligned}
$$

(et igaüks neist marsruutidest läbib kõiki urge, siis võime $\dfrac{n-1}{2}$ kampaaniat tegevat looma valida suvaliselt).

b) Nagu ülalpool tõestatud, ei saa kampaaniat tegevaid loomi olla rohkem kui $\dfrac{9-1}{2} = 4$. Konstrueerime 4 omavahel mittelõikuvat kampaaniaringkäigu marsruuti järgmiselt:

$$
\begin{aligned}
&0 \to 1 \to 2 \to 8 \to 3 \to 7 \to 4 \to 6 \to 5 \to 0\,;\\
&0 \to 2 \to 3 \to 1 \to 4 \to 8 \to 5 \to 7 \to 6 \to 0\,;\\
&0 \to 3 \to 4 \to 2 \to 5 \to 1 \to 6 \to 8 \to 7 \to 0\,;\\
&0 \to 4 \to 5 \to 3 \to 6 \to 2 \to 7 \to 1 \to 8 \to 0\,.
\end{aligned}
$$

Märkus: Tegelikult saab *mistahes* positiivse täisarvu n korral n tipuga täisgraafis konstrueerida maksimaalselt $\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ omavahel mittelõikuvat Hamiltoni tsüklit (selles antud ülesanne graafiteooria keelde "tõlgituna" seisneb). Selle väite tõestuses kasutatav konstruktsioon on sarnane lahenduse b) osas esitatule.

20. *Vastus*: on 9 kaarti, millel on üks must ja üks valge külg, ning 3 kahe valge küljega kaarti.

Tähistagu $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$ kaartide neid külgi, mis on alguses nähtaval, ja $b_1, b_2, \ldots, b_{12}$ alguses laua pool olevaid külgi — igaüks neist külgedest on kas valge või must. Ülesande tingimustest teame järgmist:

(a) külgede $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}$ hulgas on 9 musta ja 3 valget;

(b) külgede $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}$ hulgas on 4 musta ja 8 valget;

(c) külgede $b_1, b_2, b_3, a_4, a_5, a_6, b_7, b_8, b_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}$ hulgas on 6 musta ja 6 valget;

(d) külgede $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, b_7, b_8, b_9, b_{10}, b_{11}, b_{12}$ hulgas on 5 musta ja 7 valget.

Juhtudel (b) ja (d) kokku on loetletud kõikide kaartide mõlemad küljed täpselt üks kord — seega on nende seas kokku 9 musta ja 15 valget. Juhul (a) on niisiis kõik olemasolevad mustad küljed nähtaval ja seega on meil 9 kaarti, millel on üks must ja üks valge külg, ning 3 kaarti, mille mõlemad küljed on valged.