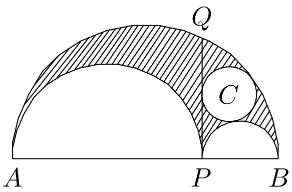
Matemaatikaolümpiaad “Balti tee ’96”

Päivöläs, 3. novembril 1996

1. Olgu α ja $\beta \neq 0$ mistahes kaks nurka korrapärase 1996-nurga diagonaalidega määratud sirgete vahel. Tõesta, et $\dfrac{\alpha}{\beta}$ on ratsionaalarv.

2. Joonisel on kujutatud ringjoon C ja kolm poolringjoont. Ringjoon C puutub kaht poolringjoont ja lõiku PQ, mis on risti lõiguga AB. Viirutatud osa pindala on 39π ja ringjoonega C piiratud ringi pindala on 9π. Leia lõigu AB pikkus.



3. Olgu $ABCD$ ühikruut ning P ja Q niisugused tasandi punktid, et Q on kolmnurga BPC ümberringjoone keskpunkt ja D on kolmnurga PQA ümberringjoone keskpunkt. Leia lõigu PQ pikkuse kõik võimalikud väärtused.

4. $ABCD$ on trapets ($AD \parallel BC$). P on niisugune punkt sirgel AB, et $\angle CPD$ väärtus on võimalikest suurim. Q on niisugune punkt sirgel CD, et $\angle BQA$ väärtus on võimalikest suurim. On teada, et punkt P asub lõigul AB. Tõesta, et $\angle CPD = \angle BQA$.

5. Olgu $ABCD$ kumer kõõlnelinurk ning olgu r_a, r_b, r_c, r_d vastavalt kolmnurkade BCD, ACD, ABD, ABC siseringjoonte raadiused. Tõesta, et $r_a + r_c = r_b + r_d$.

6. Olgu a, b, c, d positiivsed täisarvud ja $ab = cd$. Tõesta, et $a + b + c + d$ ei ole algarv.

7. Täisarvude jada a_1, a_2, ... on määratud võrdustega $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ ja

$$a_{n+2} = \begin{cases} 5a_{n+1} - 3a_n, & \text{kui } a_n \cdot a_{n+1} \text{ on paarisarv} \\ a_{n+1} - a_n, & \text{kui } a_n \cdot a_{n+1} \text{ on paaritu} \end{cases}$$

iga $n \geqslant 1$ korral. Tõesta, et $a_n \neq 0$ iga n korral.

8. Vaatleme jada

$$x_1 = 19, \quad x_2 = 95,$$
$$x_{n+2} = \mathrm{VÜK}(x_{n+1}, x_n) + x_n$$

iga $n \geqslant 1$ korral, kus $\mathrm{VÜK}(a, b)$ tähistab arvude a ja b vähimat ühiskordset. Leia arvude x_{1995} ja x_{1996} suurim ühistegur.

9. Olgu n ja k täisarvud, $1 < k \leqslant n$. Leia n erinevast täisarvust koosnev hulk A ja täisarv b, mis rahuldavad järgmisi tingimusi:
   (i) Ükski hulga A $k-1$ erineva elemendi korrutis ei jagu arvuga b.
   (ii) Hulga A mistahes k erineva elemendi korrutis jagub arvuga b.
   (iii) Ükski hulga A element a ei jagu selle hulga ühegi teise elemendiga a'.

10. Tähistagu $d(n)$ positiivse täisarvu n erinevate positiivsete jagajate arvu (1 ja n kaasa arvatud). Olgu $a > 1$ ja $n > 0$ niisugused täisarvud, et $a^n + 1$ on algarv. Tõesta, et
$$d(a^n - 1) \geqslant n\ .$$

11. Reaalarvudel $x_1, x_2, \ldots, x_{1996}$ on järgmine omadus: iga ruutpolünoomi W korral on arvude $W(x_1), W(x_2), \ldots, W(x_{1996})$ hulgas vähemalt kolm võrdset. Tõesta, et arvude $x_1, x_2, \ldots, x_{1996}$ hulgas on vähemalt kolm võrdset.

12. Olgu S täisarvude hulk, milles sisalduvad arvud 0 ja 1996 ning millel on järgmine omadus: kui mingi nullist erineva polünoomi kõik kordajad kuuluvad hulka S, siis selle polünoomi kõik täisarvulised juured kuuluvad samuti hulka S. Tõesta, et arv -2 kuulub hulka S.

13. Vaatleme funktsioone f, mis on määratud täisarvude hulgal ja rahuldavad iga täisarvu x korral tingimust
$$f(x) = f(x^2 + x + 1).$$
Leia kõik niisugused a) paarisfunktsioonid, b) paaritud funktsioonid.

14. Funktsiooni $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ (kus $n > 1$) graafik lõikab sirget $y = b$ punktides $B_1, B_2, \ldots, B_n$ (järjekorras vasakult paremale) ning sirget $y = c$ ($c \neq b$) punktides $C_1, C_2, \ldots, C_n$ (samuti järjekorras vasakult paremale). Olgu P mingi punkt sirgel $y = c$, mis asub punktist C_n paremal pool. Leia summa $\cot(\angle B_1C_1P) + \ldots + \cot(\angle B_nC_nP)$.

15. Milliste positiivsete reaalarvude a, b korral kehtib võrratus
$$\begin{aligned} &x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + \ldots + x_{n-1} \cdot x_n + x_n \cdot x_1 \geqslant \\ &\qquad \geqslant x_1^a \cdot x_2^b \cdot x_3^a + x_2^a \cdot x_3^b \cdot x_4^a + \ldots + x_n^a \cdot x_1^b \cdot x_2^a \end{aligned}$$
mistahes täisarvu $n > 2$ ja positiivsete reaalarvude $x_1, \ldots, x_n$ jaoks?

16. Kaks mängijat märgivad kordamööda lõpmatul ruudulisel paberil mingi veel märkimata ruudu vastavalt sümboliga $\times$ või $\circ$. Võidab see, kes esimesena täidab oma sümbolitega mingi ruudu suurusega 2×2. Kas alustajal on alati võimalik võita?

17. Kasutades igaüht kaheksast numbrist 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ja 9 täpselt üks kord, moodustatakse kolmekohaline arv A, kaks kahekohalist arvu B ja C, $B < C$ ning ühekohaline arv D. Seejuures $A + D = B + C = 143$. Mitmel erineval viisil on seda võimalik teha?

18. Olümpiaadi žüriis on algul 30 liiget. Iga žürii liige peab mõningaid oma kolleege kompetentseteks ja kõiki ülejäänuid ebakompetentseks, kusjuures need hinnangud ei muutu. Iga koosoleku algul toimub hääletamine ning kõik need žürii liikmed, keda rohkem kui pooled hääletajad peavad ebakompetentseks, arvatakse olümpiaadi lõpuni žüriist välja (keegi ei võta osa hääletusest iseenda kompetentsuse kohta). Tõesta, et ülimalt 15 koosoleku järel kedagi žürii koosseisust enam välja ei arvata.

19. Neljas kuhjas on vastavalt 38, 45, 61 ja 70 tikku. Kaks mängijat valivad kordamööda mistahes kaks kuhja ning võtavad ära mingi nullist erineva arvu tikke ühest ja mingi nullist erineva arvu tikke teisest valitud kuhjast. Kaotab see, kes ei saa enam käiku teha. Kummal mängijatest on võitev strateegia?

20. Kas on võimalik kõik positiivsed täisarvud jaotada kaheks mittelõikuvaks hulgaks A ja B, nii et
    (i) ükski arvude kolmik hulgast A ei moodusta aritmeetilist progressiooni,
    (ii) hulka B kuuluvatest arvudest ei saa moodustada ühtki lõpmatut mittekonstantset aritmeetilist progressiooni?

Ülesannete lahendused

1. Paneme tähele, et 1996-nurga mistahes diagonaalide s ja t jaoks saame leida niisugused 1996-nurga ühest tipust X lähtuvad küljed või diagonaalid s' ja t', et $s \parallel s'$ ja $t \parallel t'$. Selliste külgede või diagonaalide vaheline nurk on aga tipust X 1996-nurga mistahes kahte *naabertippu* tõmmatud diagonaalide vahelise nurga $\varphi = \dfrac{\pi}{1996}$ kordne.

   Märkus: Tõestatava väite seisukohalt ei ole oluline, millistes ühikutes nurki mõõta (sest vaja on tõestada kahe nurga suuruste *suhte* ratsionaalarvulisus). Mõõtes nurki kraadides, saame $\varphi = \dfrac{180}{1996}$ ning seega on 1996-nurga mistahes külgede või diagonaalidega määratud sirgete vahelise nurga kraadides mõõdetud arvväärtus *ise* ratsionaalarv.

2. *Vastus:* 32.

   Olgu poolringjooned, mille diameetriteks on vastavalt lõigud AP ja PB, vastavalt raadiustega r ja s. Siis poolringjoon, mille diameetriks on lõik AB, on raadiusega $r + s$ ning ülesande tingimustest saame

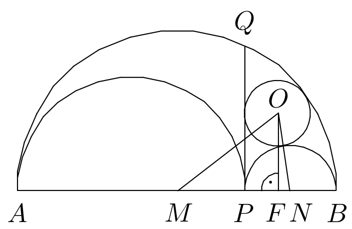
   $$39\pi = \frac{\pi}{2}\left((r+s)^2 - r^2 - s^2\right) - 9\pi ,$$

   kust $rs = 48$.

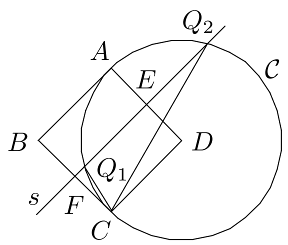
   Olgu nüüd M ja N vastavalt lõikude AB ja PB keskpunktid (ja seega ühtlasi ka vastavate poolringjoonte keskpunktid), O ringjoone C keskpunkt ja F selle ristprojektsioon lõigule AB (vt. joonist 1). Et ringjoone C raadius on 3, siis $|MO| = r + s - 3$, $|MF| = r - s + 3$, $|ON| = s + 3$ ja $|FN| = s - 3$. Nüüd saame Pythagorase teoreemist kolmnurkade MFO ja NFO jaoks

   $$(r+s-3)^2 - (r-s+3)^2 = |OF|^2 = (s+3)^2 - (s-3)^2 ,$$

   kust $r(s-3) = 3s$ ja $3(r+s) = rs = 48$. Seega $|AB| = 2(r+s) = 32$.



Joonis 1



Joonis 2

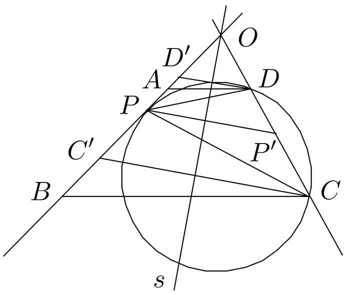
3. *Vastus:* $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ ja $\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

   Et punkt D on kolmnurga PQA ümberringjoone keskpunkt, siis $|DQ| = |DA|$, s.t. punkt Q paikneb ringjoonel $\mathcal{C}$ keskpunktiga D, mis läbib punkti A (vt. joonist 2). Kuna punkt Q on kolmnurga BPC ümberringjoone keskpunkt, siis $|PQ| = |BQ| = |CQ|$, s.t. punkt Q paikneb lõigu BC keskristsirgel s. Niisiis saame punktile Q kaks võimalikku asukohta (punktid Q_1 ja Q_2 joonisel 2) ning lõigu PQ pikkuse asemel võime arvutada lõigu CQ pikkuse.

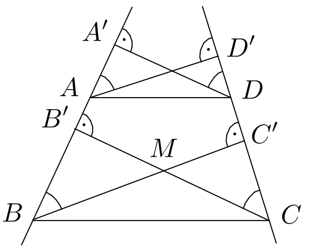
Olgu lõikude AD ja BC keskpunktid (ehk teisisõnu nende lõikepunktid sirgega s) vastavalt E ja F. Täisnurksest kolmnurgast DEQ_1 leiame $|EQ_1| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Kuna punkt E poolitab ringjoone $\mathcal{C}$ kõõlu Q_1Q_2, siis ka $|EQ_2| = |EQ_1| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Täisnurksetest kolmnurkadest CFQ_1 ja CFQ_2 leiame nüüd kergesti $|CQ_1| = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ ja $|CQ_2| = \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

4. *Lahendus 1:* Paneme kõigepealt tähele, et nurga $\angle CPD$ väärtus on võimalikest suurim parajasti siis, kui sirge AB on kolmnurga CPD ümberringjoone puutujaks (selles veendumiseks nihutame punkte C ja D läbiva ringjoone keskpunkti lõigu CD keskristsirgel; eraldi tuleb vaadelda juhte, kus selle ringjoone keskpunkt asub ühel või teisel pool sirget CD). Analoogiliselt on nurga $\angle BQA$ väärtus võimalikest suurim parajasti siis, kui sirge CD on kolmnurga BQA ümberringjoone puutujaks.

Olgu O trapetsi haarade AB ja CD pikenduste lõikepunkt ja sirge s nurga $\angle AOD$ poolitaja (vt. joonist 3). Olgu C', D' ja P' vastavalt punktide C, D ja P peegeldused sirgest s, siis sirge CD puutub kolmnurga $C'P'D'$ ümberringjoont. Homoteetia keskpunktiga O ja teguriga $\frac{|OA|}{|OD'|}$ viib punkti D' punktiks A ja punkti C' punktiks B, seega viib see punkti P' selliseks punktiks P'', et sirge CD puutub kolmnurga $BP''A$ ümberringjoont, s.t. $P'' = Q$. Seejuures $\angle CPD = \angle C'P'D' = \angle BP''A = \angle BQA$.



Joonis 3



Joonis 4

Lahendus 2: Paneme tähele, et ülesandes kirjeldatud punkti P asukoht ja seega ka nurga $\angle CPD$ suurus ei muutu, kui trapets $ABCD$ asendada mistahes sellise trapetsiga $A'B'CD$, mille tipud A' ja B' paiknevad sirgel AB. Samuti ei muutu punkti Q asukoht ega nurga $\angle AQB$ suurus, kui trapets $ABCD$ asendada mistahes sellise trapetsiga $ABC'D'$, mille tipud C' ja D' paiknevad sirgel CD.

Võtame punktideks A', B' vastavalt punktide D, C ristprojektsioonid sirgele AB ja punktideks C', D' vastavalt punktide B, A ristprojektsioonid sirgele CD. Näitame, et tekkivad täisnurksed trapetsid $DCB'A'$ ja $ABC'D'$ on sarnased. Tõepoolest, olgu M sirgete CB' ja BC' lõikepunkt (vt. joonist 4), siis täisnurksete kolmnurkade $BB'M$ ja $CC'M$ sarnasusest saame $\angle C'BA = \angle B'CD$, kolmnurkade $AA'D$ ja $BB'C$ sarnasusest $\dfrac{|A'D|}{|AD|} = \dfrac{|B'C|}{|BC|}$ ja kolmnurkade $AD'D$ ja $BC'C$ sarnasusest $\dfrac{|AD|}{|AD'|} = \dfrac{|BC|}{|BC'|}$ — seega $\dfrac{|A'D|}{|AD'|} = \dfrac{|B'C|}{|BC'|}$.

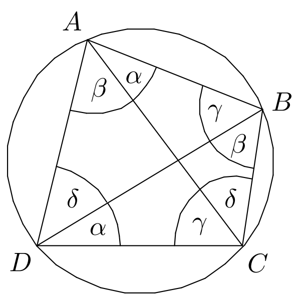
Et punkt P ja nurk $\angle CPD$ on defineeritud trapetsi $DCB'A'$ jaoks täpselt samuti nagu punkt Q ja nurk $\angle BQA$ trapetsi $ABC'D'$ jaoks, siis saame nende trapetsite sarnasusest järeldada, et $\angle CPD = \angle BQA$.

5. Näitame kõigepealt, et mistahes kolmnurgas XYZ, mille sise- ja ümberringjoone raadiused on vastavalt r ja R, kehtib võrdus

$$\cos\angle X + \cos\angle Y + \cos\angle Z = 1 + \frac{r}{R}\,.$$

Tõepoolest, olgu $a = |XY|$, $b = |XZ|$, $c = |YZ|$ ja $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, siis kolmnurga pindala valemitest $S = pr = \dfrac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ saame

$$\begin{aligned}
1 + \frac{r}{R} &= 1 + \frac{4S^2}{p \cdot abc} = 1 + \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{p \cdot abc} = \\
&= \frac{2abc + (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{2abc} = \\
&= \frac{-a^3 - b^3 - c^3 + a(b^2+c^2) + b(a^2+c^2) + c(a^2+b^2)}{2abc} = \\
&= \frac{c(a^2+b^2-c^2) + b(a^2+c^2-b^2) + a(b^2+c^2-a^2)}{2abc} = \\
&= \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \\
&= \cos\angle X + \cos\angle Y + \cos\angle Z\,.
\end{aligned}$$



Joonis 5

Rakendades tõestatud seost kujul $r = (\cos\angle X + \cos\angle Y + \cos\angle Z - 1)R$ kolmnurkade BCD ja ABD korral ja arvestades, et $\cos(\alpha+\beta) = -\cos(\gamma+\delta)$ (vt. joonist 5), saame

$$\begin{aligned} r_a + r_c &= \big(\cos\alpha + \cos\beta + \cos(\gamma+\delta) - 1\big)R + \big(\cos\gamma + \cos\delta + \cos(\alpha+\beta) - 1\big)R = \\ &= (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta - 2)R\ , \end{aligned}$$

kus R on nelinurga $ABCD$ ümberringjoone raadius. Analoogiliselt saame ka näidata, et

$$r_b + r_d = (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta - 2)R\ .$$

6. *Lahendus 1:* Tingimusest $ab = cd$ saame $a \cdot (a+b+c+d) = (a+c) \cdot (a+d)$, kusjuures mõlemad tegurid $a+c$ ja $a+d$ on suuremad kui a.

   Lahendus 2: Olgu $x = \text{SÜT}(a,c)$, $y = \text{SÜT}(a,d)$, $z = \text{SÜT}(b,c)$, $w = \text{SÜT}(b,d)$. Tingimusest $ab = cd$ saame siis $a = xy$, $b = zw$, $c = xz$, $d = yw$ ja $a+b+c+d = (x+w)\cdot(y+z)$.

7. Paneme tähele, et vaadeldava jada esimeste liikmete jagamisel kuuega tekkivad jäägid on 1, 2, 1, 5, 4, 5, 1, 2, ... Et jada iga järgmine liige on täielikult määratud kahe eelmise liikmega, siis selle liikme jagamisel kuuega tekkiv jääk on määratud kahe eelmise liikme jagamisel kuuega tekkivate jääkidega. Eespool toodust näema, et need jäägid hakkavad tsükliliselt korduma, kusjuures jada ükski liige ei jagu kuuega.

8. *Vastus:* 19.

   Tõestame induktsiooniga, et $\text{SÜT}(x_n, x_{n+1}) = 19$ iga $n \geqslant 1$ korral. Et $x_1 = 19$ ja $x_2 = 19 \cdot 5$, siis $n = 1$ korral väide kehtib. Olgu nüüd $\text{SÜT}(x_{n-1}, x_n) = 19$, s.t. $x_{n-1} = 19a$ ja $x_n = 19b$, kus $\text{SÜT}(a,b) = 1$. Siis $x_{n+1} = 19ab + 19a = 19a(b+1)$ ja kuna $\text{SÜT}(b, a(b+1)) = 1$, siis ka $\text{SÜT}(x_n, x_{n+1}) = 19$.

9. Ülesande tingimusi rahuldab näiteks $A = \{2p_1, 2p_2, \ldots, 2p_n\}$ ja $b = 2^k$, kus $p_1, p_2, \ldots, p_n$ on erinevad paaritud algarvud.

10. *Lahendus:* Näitame kõigepealt, et $n = 2^s$ mingi täisarvu $s \geqslant 0$ korral. Tõepoolest, olgu $n = mp$, kus p on paaritu algarv, siis

    $$a^n + 1 = a^{mp} + 1 = (a^m)^p + 1^p = (a^m + 1)(a^{(p-1)m} - a^{(p-2)m} + \ldots + 1)\ ,$$

    s.t. algarv $a^n + 1$ jagub arvuga $a^m + 1$, vastuolu.

    Tõestame nüüd võrratuse $d(a^{2^s} - 1) \geqslant 2^s$ induktsiooniga s järgi. Kui $s = 0$, siis on arvul $a^{2^0} - 1 = a - 1$ ilmselt vähemalt $2^0 = 1$ jagaja. Olgu nüüd arvul $a^{2^{s-1}} - 1$ vähemalt 2^{s-1} jagajat. Kuna $a^{2^s} - 1 = (a^{2^{s-1}} - 1)(a^{2^{s-1}} + 1)$, siis saame arvu $a^{2^{s-1}} - 1$ igale jagajale q vastavusse seada kaks arvu $a^{2^s} - 1$ jagajat: q and $q \cdot (a^{2^{s-1}} + 1)$. Need vähemalt $2 \cdot 2^{s-1} = 2^s$ arvu $a^{2^s} - 1$ jagajat on kõik erinevad, sest mistahes jagaja kujul $q \cdot (a^{2^{s-1}} + 1)$ on suurem arvust $a^{2^{s-1}} - 1$ ja seega ka selle mistahes jagajast q.

11. Vaatleme lõiku $[a,b]$, mis sisaldab kõik arvud $x_1, x_2, \ldots, x_{1996}$. Olgu $c < a$, siis funktsioon $W(x) = (x-c)^2$ on lõigul $[a,b]$ rangelt kasvav ja sellest, et $W(x_i) = W(x_j) = W(x_k)$, järeldub $x_i = x_j = x_k$.

12. Paneme tähele, et arv -1 on polünoomi $1996x + 1996$ juur ja seega kuulub hulka S. Niisiis polünoomi $-x^{1996} - x^{1995} - \ldots - x^2 - x + 1996$ kõik kordajad kuuluvad hulka S ja arv 1 kui selle polünoomi juur kuulub samuti hulka S. Lõpuks vaatleme polünoomi $-x^{10} + x^9 - x^8 + x^7 - x^6 + x^3 - x^2 + 1996$, mille kõik kordajad kuuluvad vastavalt eespool tõestatule hulka S ja mille üks juur on -2.

13. *Vastus:* a) suvaline konstantne funktsioon; b) $f(x) \equiv 0$.

a) Rakendades ülesande tingimust $x - 1$ korral, saame

$$\begin{aligned} f(x-1) &= f\big((x-1)^2 + (x-1) + 1\big) = f(x^2 - x + 1) = \\ &= f\big((-x)^2 + (-x) + 1\big) = f(-x) = f(x)\ , \end{aligned}$$

s.t. funktsioon $f(x)$ on kogu täisarvude hulgal konstantne. Teiselt poolt, mistahes konstantne funktsioon $f(x) = c$ ilmselt rahuldab ülesande tingimusi.

b) Et $f(0) = -f(0)$, siis $f(0) = 0$. Analoogiliselt eelmises punktis tehtuga saame

$$f(x-1) = f(-x) = -f(x)\ ,$$

mistõttu $f(x) = 0$ mistahes täisarvu $x \leqslant 0$ korral (ning kuna tegemist on paaritu funktsiooniga, siis ka mistahes täisarvu $x \geqslant 0$ korral).

14. *Vastus:* 0.

Olgu punktide B_i ja C_i koordinaadid vastavalt $B_i(b_i, b)$ ja $C_i(c_i, c)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, siis $\cot \angle B_i C_i P = \dfrac{b_i - c_i}{|b - c|}$ ja

$$\cot \angle B_1 C_1 P + \ldots + \cot \angle B_n C_n P = \frac{1}{|b-c|}\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i - \sum_{i=1}^{n} c_i\Big)\ .$$

Viete'i valemitest saame

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} c_i = -a_{n-1}\ ,$$

seega on ülesandes antud kootangensite summa võrdne nulliga.

15. *Vastus:* $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 1$.

Lahendus 1: Võttes $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$, saame $nx^2 \geqslant nx^{2a+b}$. Arvestades, et võrratus peab kehtima nii $x < 1$ kui ka $x > 1$ korral, järeldame siit, et $2a + b = 2$. Võttes $n = 6$ ja $x_1 = x_3 = x_5 = 1$, $x_2 = x_4 = x_6 = x$, saame $2x \geqslant x^b + x^{2a}$, mis koos võrdusega $b + 2a = 2$ annab $2a = b = 1$, s.t. $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 1$.

Teiselt poolt, olgu $y_i = \sqrt{x_i \cdot x_{i+1}}$ ja $z_i = \sqrt{x_i \cdot x_{i-1}}$ (lugedes indekseid “modulo n”, s.t. $x_0 = x_n$ ja $x_{n+1} = x_1$), siis Cauchy-Bunjakowski-Schwartzi võrratus

$$\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2} \cdot \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2} \geqslant y_1 z_1 + \ldots + y_n z_n$$

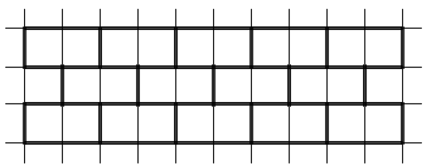
langeb kokku ülesandes antud võrratusega $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 1$ jaoks.

Lahendus 2: Näitame nii nagu eelmise lahenduse alguses, et antud võrratus *võib kehtida* ainult $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 1$ korral. Teiselt poolt, esitades iga liidetava $x_i x_{i+1}$ kujul $\dfrac{1}{2} x_i x_{i+1} + \dfrac{1}{2} x_i x_{i+1}$ (indekseid vaatleme siin jällegi "modulo n"), võttes saadud $2n$ liidetavat sobivalt paaridesse ning kasutades aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust saame:

$$
\begin{aligned}
& x_1 x_2 + x_2 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n + x_n x_1 = \\
& = \left(\frac{1}{2} x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_2 x_3\right) + \left(\frac{1}{2} x_2 x_3 + \frac{1}{2} x_3 x_4\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2} x_n x_1 + \frac{1}{2} x_1 x_2\right) \geqslant \\
& \geqslant 2\sqrt{\left(\frac{1}{2} x_1 x_2 \cdot \frac{1}{2} x_2 x_3\right)} + 2\sqrt{\left(\frac{1}{2} x_2 x_3 \cdot \frac{1}{2} x_3 x_4\right)} + \ldots + 2\sqrt{\left(\frac{1}{2} x_n x_1 \cdot \frac{1}{2} x_1 x_2\right)} = \\
& = x_1^{\frac{1}{2}} x_2 x_3^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}} x_3 x_4^{\frac{1}{2}} + \ldots + x_n^{\frac{1}{2}} x_1 x_2^{\frac{1}{2}} .
\end{aligned}
$$

16. *Vastus:* ei ole.

    Jaotame kõik ruudulise paberi ruudud paarideks nii, nagu näidatud joonisel 6. Kui teine mängija märgib igal oma käigul ruudu, mis on alustaja viimasena märgitud ruudu paariliseks, ei ole alustajal ilmselt võimalik täita oma sümbolitega ühtki 2×2 ruutu.



Joonis 6

17. *Vastus:* 24.

    Arvu A kümneliste number peab olema 3, sest vastasel korral pole võimalik täita tingimust $A + D = 143$. Seega saame arvude A ja D moodustamiseks kuus võimalust, kusjuures kindlasti kasutatakse selleks ära numbrid 1, 3 ja üks numbrite paaridest $(4, 9)$, $(5, 8)$ ja $(6, 7)$. Igaühel neist kuuest juhust saame ülejäänud numbritest arvud B ja C moodustada neljal viisil (arvestades, et B kümneliste number peab olema väiksem C kümneliste numbrist ja nende kümneliste numbrite summa peab olema 13).

18. *Lahendus 1:* Paneme kõigepealt tähele, et kui žürii mingil koosolekul kedagi žüriist välja ei arvatud, siis ei arvata kedagi žüriist välja ka edaspidi (sest hääletajad on needsamad ja igaühe arvamused oma kolleegidest ei muutu). Seega piisab näidata, et kui žürii $(k+1)$. koosolekul arvatakse žüriist välja vähemalt üks liige, siis esimese k koosolekuga on žüriist välja arvatud vähemalt $2k$ liiget.

    Selleks paneme tähele, et kui mingist koosolekust võtab osa $2m - 1$ liiget, siis kellegi žüriist väljaarvamiseks peab tema vastu antama vähemalt m häält. Seega, kui koosolekust võtab osa $2m$ liiget ja žüriist välja arvatakse ainult üks liige, siis järgmisel koosolekul enam kedagi žüriist välja ei arvata (sest iga järelejäänud liikme vastu anti ülimalt $m-1$ häält ja järgmisel koosolekul ei saa vastuhäälte arv suureneda).

Niisiis, kui mingil žürii koosolekul on paarisarv liikmeid ja järgmisel koosolekul liikmete žüriist väljaarvamine veel jätkub, siis on kaks võimalust: kas sellel koosolekul arvatakse välja vähemalt 3 liiget või arvatakse välja täpselt 2 liiget ja järgmisel koosolekul on jälle paarisarv liikmeid. Paaritu arvu liikmete korral on samuti kaks võimalust: kas arvatakse välja üksainus liige ja järgmisel koosolekul on paarisarv liikmeid või arvatakse välja vähemalt 2 liiget.

Arvestades ülalöeldut ja seda, et algul on žüriis 30 liiget (s.t. paarisarv), olemegi tõestanud lahenduse esimeses lõigus sõnastatud väite.

Lahendus 2: Nii nagu esimeses lahenduses paneme kõigepealt tähele, et piisab vaadelda juhtu, kus igaühel esimesest 15 koosolekust arvati žüriist välja vähemalt üks selle liikmetest. Samuti paneme tähele, et kui mingil žürii koosolekul k vastuhäält saanud žüriist välja arvati, siis järgmisel koosolekul ei olnud enam kellelgi võimalik saada rohkem kui $k-1$ vastuhäält. Kuna esimesel koosolekul arvati žüriist välja kõik need, kes said 15 või rohkem vastuhäält, siis läks järgmisel koosolekul žüriist välja arvamiseks vaja ülimalt 14 vastuhäält, kolmandal koosolekul ülimalt 13 vastuhäält, ..., 15. koosolekul ülimalt 1 vastuhääl. Seega on selge, et žürii 16. koosolekul enam kedagi žüriist välja ei arvatud.

19. *Vastus:* alustajal.

Esimese käiguga võtab alustaja teisest ja kolmandast kuhjast tikke nii, et tema käigu järel on kolmes kuhjas igaühes 38 tikku ja neljandas 71 tikku. Et teise mängija käigu järel ei saa kolmes väiksemas kuhjas olla ühepalju tikke, saab alustaja oma järgmisel käigul jälle tekitada olukorra, kus kolmes kuhjas on igaühes a tikku ja neljandas kuhjas b tikku, kusjuures $a \leqslant b$. Samamoodi jätkates ei vähenda alustaja oma käiguga kunagi tikkude minimaalset arvu kuhjas ning seetõttu peab esimesena võtma ühe või kaks kuhja tühjaks teine mängija. Alustaja võtab seepeale tühjaks veel kaks kuhja ning teisel mängijal ei ole enam võimalik käiku teha.

20. *Vastus:* jah, on võimalik.

Positiivsetest täisarvudest moodustatud mittekonstantne aritmeetiline jada saab olla ainult kasvav. Et aritmeetiline jada on üheselt määratud oma esimese liikme ja jada vahega ja kõik positiivsete täisarvude paarid on võimalik järjestada jadasse (võttes kõigepealt paari $(1,1)$, seejärel paarid summaga 3, paarid summaga 4, jne.), siis on ka kõik positiivsetest täisarvudest moodustatud mittekonstantsed aritmeetilised jadad võimalik järjestada jadasse, s.t. nummerdada positiivsete täisarvudega: J_1, J_2, ..., J_n, ... Olgu nüüd $A = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \}$, kus a_1 on jada J_1 esimene liige ja a_k $(k \geqslant 2)$ on jada J_k esimene selline liige, mis rahuldab tingimust $a_k > 2a_{k-1}$. Siis hulga A ükski kolm elementi ei moodusta aritmeetilist progressiooni ja kõikide ülejäänud positiivsete täisarvude hulk B ei sisalda ühtki lõpmatut mittekonstantset aritmeetilist jada, sest iga sellise jada mingi liige kuulub hulka A.