Matemaatikaolümpiaad “Balti tee ’95”

Västeråsis, 12. novembril 1995

1. Leia kõik positiivsete täisarvude kolmikud (x, y, z), mis rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x^2 = 2(y+z) \\ x^6 = y^6 + z^6 + 31(y^2+z^2)\ . \end{cases}$$

2. Olgu a ja k sellised positiivsed täisarvud, et arv $(a-1)a(a+1)$ jagub arvuga a^2+k. Tõesta, et $k \geqslant a$.

3. Paarikaupa ühistegurita positiivsed täisarvud a, b, c rahuldavad tingimust $a^2+b^2=c^2$, kusjuures a ja c on paaritud arvud. Tõesta, et $b+c$ on täisruut.

4. John on vanem kui Mary. Kui John vahetab oma vanuse (kahekohalise täisarvu) numbrid, saab ta Mary vanuse. Johni ja Mary vanuste ruutude vahe on täisarvu ruut. Kui vanad on Mary ja John?

5. Olgu $a < b < c$ positiivsed täisarvud. Tõesta, et mistahes $2c$ järjestikuse positiivse täisarvu seas leidub kolm erinevat arvu x, y, z nii, et arv xyz jagub arvuga abc.

6. Tõesta, et positiivsete arvude a, b, c, d korral

$$\frac{a+c}{a+b} + \frac{b+d}{b+c} + \frac{c+a}{c+d} + \frac{d+b}{d+a} \geqslant 4\ .$$

7. Tõesta, et $\sin^3 18^\circ + \sin^2 18^\circ = \frac{1}{8}$.

8. Reaalarvud a, b ja c rahuldavad võrratusi $|a| \geqslant |b+c|$, $|b| \geqslant |c+a|$ ja $|c| \geqslant |a+b|$. Tõesta, et $a+b+c=0$.

9. Tõesta, et

$$\frac{1995}{2} - \frac{1994}{3} + \frac{1993}{4} - \ldots - \frac{2}{1995} + \frac{1}{1996} = \frac{1}{999} + \frac{3}{1000} + \ldots + \frac{1995}{1996}\ .$$

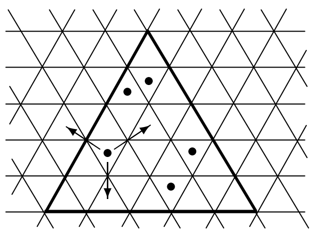
10. Leia kõik reaalarvuliste väärtustega funktsioonid f, mis on määratud kõikide nullist erinevate reaalarvuliste argumendi väärtuste korral ning rahuldavad tingimusi:
    (a) $f(1) = 1$,
    (b) $f\left(\frac{1}{x+y}\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{y}\right)$ mistahes $x, y, x+y \neq 0$ korral,
    (c) $(x+y)f(x+y) = xy\,f(x)f(y)$ mistahes $x, y, x+y \neq 0$ korral.

11. Mitmel viisil saab hulga $\{1, 2, \ldots, 1995\}$ jaotada kolmeks mittetühjaks hulgaks, millest ükski ei sisalda kaht järjestikust täisarvu?

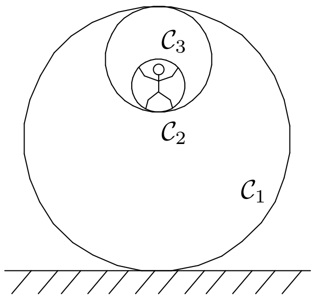
12. Olgu 19 palli paigutatud suvalisel viisil 95 kasti. Edaspidi võtame ühekorraga kuus palli ja paneme need mingisse kuude kasti, igaühte ühe palli. Kas seda protsessi sobiv arv kordi korrates on alati võimalik jõuda olukorrani, kus igaühes 95 kastist on ühepalju palle?

13. Kaks mängijat mängivad järgmist mängu. Algseisus on laual teatud arv nuppe. Mängijad teevad käike kordamööda. Käik seisneb laualt x nupu äravõtmises, kusjuures x on suvaline positiivne täisruut. Mängija, kes ei saa teha käiku, on kaotanud. Tõesta, et leidub lõpmata palju algseise, mille korral teine mängija võib võita alustaja mistahes taktika korral.

14. Lõpmatul kolmnurgalisel paberil on n kirpu. Algul asuvad kirbud erinevatel väikestel kolmnurkadel mingi n^2 väikesest kolmnurgast koosneva võrdkülgse kolmnurga sees (joonisel 1 on kujutatud üks võimalik algseis $n = 5$ korral). Kord sekundis hüppab iga kirp oma kolmnurgalt ühele selle kolmest niisugusest naabrist, mis on joonisel 1 näidatud nooltega. Milliste positiivsete täisarvude n jaoks leidub niisugune algseis, mille korral kõik n kirpu võivad lõpliku arvu hüpete järel ühel väikesel kolmnurgal kokku saada?



Joonis 1



Joonis 2

15. Tõesta, et $(2n+1)$-nurga tipud ja külgede keskpunktid on võimalik nummerdada täisarvudega $1, 2, ..., 4n+2$, kasutades iga arvu täpselt üks kord, nii et iga külje juures asuva kolme arvu summa on sama.

16. Olgu l kolmnurga ABC tipu C juures asuva välisnurga poolitaja. Sirgega l paralleelne ning külje AB keskpunkti O läbiv sirge lõikab sirget AC punktis E. Leia $|CE|$, kui $|AC| = 7$ ja $|CB| = 4$.

17. Tõesta, et leidub arv α, nii et mistahes kolmnurga ABC korral kehtib võrratus

$$\max(h_A, h_B, h_C) \leqslant \alpha \cdot \min(m_A, m_B, m_C) ,$$

kus h_A, h_B, h_C ning m_A, m_B, m_C on vastavalt kolmnurga kõrguste ja mediaanide pikkused. Leia arvu α vähim võimalik väärtus.

18. Olgu M kolmnurga ABC külje AC keskpunkt ning H tipust B tõmmatud kõrguse aluspunkt. Olgu P ja Q vastavalt punktide A ja C ristprojektsioonid nurga B poolitajale. Tõesta, et punktid H, P, M ja Q asuvad ühel ringjoonel.

19. Kosmonautide ettevalmistamisel kasutatakse järgmist seadeldist:

Ringjoon $\mathcal{C}_2$ raadiusega $2R$ veereb teise, liikumatu ringjoone $\mathcal{C}_1$ (raadiusega nR, kus n on kahest suurem täisarv) sees. Kosmonaut on kinnitatud kolmanda ringjoone $\mathcal{C}_3$ (raadiusega R) külge, mis omakorda veereb ringjoone $\mathcal{C}_2$ sees nii, et ringjoonte $\mathcal{C}_2$ ja $\mathcal{C}_3$ puutepunkt on igal ajahetkel maksimaalsel kaugusel ringjoonte $\mathcal{C}_1$ ja $\mathcal{C}_2$ puutepunktist (vt. joonist 2).

Mitu pööret (maapinna suhtes) sooritab kosmonaut koos ringjoonega $\mathcal{C}_3$ selle aja jooksul, kui ringjoon $\mathcal{C}_2$ teeb ühe täisringi ringjoone $\mathcal{C}_1$ sees?

20. Tõesta, et kui kumera viisnurga kõikide tippude mõlemad koordinaadid on täisarvud, siis selle viisnurga pindala ei ole väiksem kui $\dfrac{5}{2}$.

Ülesannete lahendused

1. Võrdusest $x^6 = y^6 + z^6 + 31(y^2 + z^2)$ näeme, et $x > y$ ja $x > z$, võrduse $x^2 = 2(y + z)$ tõttu aga peab x olema paarisarv. Saame võrratuse $4x > 2(y + z) = x^2$, mida ainsana rahuldavad $x = 2$ ja $y = z = 1$. Kontroll näitab, et $(2, 1, 1)$ on tõepoolest antud võrrandisüsteemi lahend.

2. Et $(a - 1)a(a + 1) = a(a^2 - 1) = a(a^2 + k) - a(k + 1)$, siis peab arv $a^2 + k$ olema arvu $a(k + 1) > 0$ jagaja, s.t. $a(k + 1) \geqslant a^2 + k > a^2$, kust $k \geqslant a$.

3. Et $a^2 = c^2 - b^2 = (c - b)(b + c)$, siis juhul, kui $b + c$ ei ole täisruut, peab arvudel $c - b$ ja $b + c$ ning seega ka arvudel $2c = (b + c) + (c - b)$ ja $2b = (b + c) - (c - b)$ olema ühest suurem ühine tegur n. Kuna a ja c on paaritud arvud, siis b on paarisarv ning $c - b$ ja $b + c$ on paaritud arvud, mistõttu n on paaritu arv ja seega arvude b ja c ühine tegur, mis on vastuolus ülesande tingimustega.

4. Olgu Johni ja Mary vanused vastavalt $\overline{ab} = 10a + b$ ja $\overline{ba} = 10b + a$, kus $1 \leqslant b < a \leqslant 9$. Siis $(10a + b)^2 - (10b + a)^2 = 9 \cdot 11 \cdot (a + b)(a - b) = k^2$ mingi täisarvu k korral, mistõttu $(a+b)(a-b) = 11\,m^2$ mingi täisarvu m korral. Et $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \leqslant 9^2 - 1^2 = 80$, siis $m \leqslant 2$, s.t. $(a + b)(a - b) = 11$ või $(a + b)(a - b) = 44$. Esimesel juhul $a + b = 11$ ja $a - b = 1$, kust $a = 6$ ja $b = 5$. Teisel juhul saame arvu 44 teguriteks lahutusest $44 = 2 \cdot 2 \cdot 11$ kolm erinevat võimalust, mis kõik viivad vastuoluni. Seega on Johni ja Mary vanused vastavalt 65 ja 56 aastat.

5. Kuna mistahes k järjestikuse täisarvu seas leidub arv, mis jagub arvuga k, siis mistahes c järjestikuse positiivse täisarvu $n, \ldots, n + c - 1$ seas leiduvad arvud x, y, z, mis jaguvad vastavalt arvudega a, b, c. Kui arvud x, y, z on kõik erinevad, on nõutavad arvud leitud. Kui $x = y = z$, siis asendame arvud x ja y vastavalt arvudega $x + a$ ja $y + b$ (mis sisalduvad hulgas $\{n, \ldots, n + 2c - 1\}$). Kui mingid kaks arvudest x, y, z on võrdsed ja kolmas neist erinev, siis asendame ühe võrdsetest arvudest sobiva arvuga hulgast $\{n + c, \ldots, n + 2c - 1\}$.

6. Liidetavaid rühmitades saame
$$A = \frac{a+c}{a+b} + \frac{b+d}{b+c} + \frac{c+a}{c+d} + \frac{d+b}{d+a} = $$
$$= \frac{(a+c)(a+b+c+d)}{(a+b)(c+d)} + \frac{(b+d)(a+b+c+d)}{(a+d)(b+c)} .$$
Võrratusest $4xy \leqslant (x + y)^2$ saame
$$\frac{(a+c)(a+b+c+d)}{(a+b)(c+d)} \geqslant (a+c)(a+b+c+d) \cdot \frac{4}{(a+b+c+d)^2} = $$
$$= \frac{4(a+c)}{a+b+c+d}$$
ning analoogiliselt

$$\frac{(b+d)(a+b+c+d)}{(a+d)(b+c)} \geqslant \frac{4(b+d)}{a+b+c+d}\,.$$

Niisiis $A \geqslant \dfrac{4(a+c)+4(b+d)}{a+b+c+d} = 4$.

7. Kasutades võrdust $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, saame:

$$\begin{aligned}
&\sin^3 18^\circ + \sin^2 18^\circ = \sin^2 18^\circ(\sin 18^\circ + \sin 90^\circ) = \\
&\quad = \sin^2 18^\circ \cdot 2\sin 54^\circ \cos 36^\circ = 2\sin^2 18^\circ \cos^2 36^\circ = \\
&\quad = \frac{2\sin^2 18^\circ \cos^2 18^\circ \cdot \cos^2 36^\circ}{\cos^2 18^\circ} = \frac{\sin^2 36^\circ \cos^2 36^\circ}{2\cos^2 18^\circ} = \frac{\sin^2 72^\circ}{8\cos^2 18^\circ} = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

8. Tõstes antud (mittenegatiivsete arvude vaheliste!) võrratuste pooled ruutu, saame võrratused:

$$\begin{aligned}
a^2 &\geqslant (b+c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc\,, \\
b^2 &\geqslant (c+a)^2 = c^2 + a^2 + 2ca\,, \\
c^2 &\geqslant (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab\,,
\end{aligned}$$

mis kokku liites annavad

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2(a^2+b^2+c^2) + 2(ab+bc+ca)$$

ehk $(a+b+c)^2 \leqslant 0$. Seega $a+b+c=0$.

9. Antud võrduse vasakul pool on summa $V = \sum\limits_{k=1}^{1996}(-1)^{k-1}\dfrac{1996-k}{k+1}$, paremal pool aga summa $P = \sum\limits_{k=1}^{998}\dfrac{2k-1}{998+k}$. Teisendades saame:

$$\begin{aligned}
V &= \sum_{k=1}^{1996}(-1)^{k+1}\Big(\frac{1997}{k+1} - 1\Big) = 1997 \cdot \sum_{k=1}^{1996}(-1)^{k+1}\frac{1}{k+1} = \\
&= 1997 \cdot \Big(\sum_{k=1}^{1996}(-1)^k\frac{1}{k} - (-1)^1 \cdot \frac{1}{1} + (-1)^{1997}\frac{1}{1997}\Big) = \\
&= 1997 \cdot \sum_{k=1}^{1996}(-1)^k\frac{1}{k} + 1996
\end{aligned}$$

ning

$$P = \sum_{k=1}^{998}\Big(\frac{2k+1996}{998+k} - \frac{1997}{998+k}\Big) = 1996 - 1997 \cdot \sum_{k=1}^{998}\frac{1}{k+998}\,.$$

Seega piisab näidata, et $\sum\limits_{k=1}^{1996}(-1)^{k-1}\frac{1}{k} = \sum\limits_{k=1}^{998}\frac{1}{k+998}$. Tõepoolest,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{1996}(-1)^{k-1}\frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{1996}\frac{1}{k} - 2\cdot\sum_{k=1}^{998}\frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{1996}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{998}\frac{1}{k} = \\ &= \sum_{k=999}^{1996}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{998}\frac{1}{k+998}\,.\end{aligned}$$

10. Võttes tingimuses (b) $x = y$, saame $f\Big(\frac{1}{2x}\Big) = 2\,f\Big(\frac{1}{x}\Big)$. Et iga $z \neq 0$ on esitatav kujul $z = \frac{1}{2x}$, siis saame mistahes $z \neq 0$ korral $f(2z) = \frac{1}{2}f(z)$. Võttes nüüd tingimuses (c) $x = y = z$, saame $2z\,f(2z) = z^2\big(f(z)\big)^2$ ehk $zf(z) = \big(zf(z)\big)^2$, s.t. $zf(z) = 0$ või $zf(z) = 1$. Esimesel juhul peaks olema $f(z) = 0$, kust $f(1) = \big(z+(1-z)\big)\,f\big(z+(1-z)\big) = = z(1-z)\,f(z)\,f(1-z) = 0$, mis on vastuolus tingimusega (a). Seega $zf(z) = 1$, s.t. $f(z) = \frac{1}{z}$ iga $z \neq 0$ korral. Jääb üle kontrollida, et funktsioon $f(x) = \frac{1}{x}$ rahuldab ülesande tingimusi (a)–(c).

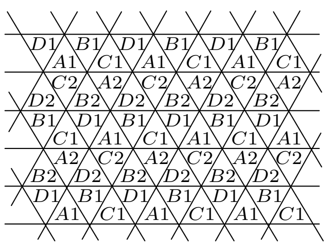
11. Asudes arve 1, 2, …, 1995 (antud järjekorras) jaotama kolme alamhulga A, B, C vahel näeme, et arvu 1 paigutamiseks on 3 võimalust ning iga järgneva arvu paigutamiseks (arvestades juba tehtud valikuid ja seda, et ükski alamhulk ei sisaldaks kaht järjestikust arvu) on 2 võimalust. Kokku saame seega arvud alamhulkadesse jaotada $3\cdot 2^{1994}$ viisil. Neist 6 juhul on üks saadav alamhulk tühi, mis on vastuolus ülesande tingimustega. Kuna me jaotusi, mis on üksteisest saadavad alamhulkade nimede vahetamise teel, ei loe erinevateks, siis annab eespool kirjeldatud protseduur iga ülesande tingimustele vastava jaotuse kuuel korral ning selliste jaotuste koguarv on järelikult $\frac{3\cdot 2^{1994}-6}{6} = 2^{1993}-1$.

12. Et $95 = 16\cdot 6 - 1$, siis saame $16\cdot 6$ palli kastidesse paigutada nii, et ühte kasti lisandub kaks palli ja igaühte ülejäänud kastidest üks pall. Seetõttu on palle võimalik lisada nii, et lõpliku arvu sammude järel saab pallide arv kõikides kastides võrdseks.

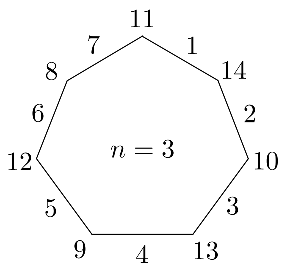
13. Oletame vastuväiteliselt, et teisel mängijal on võiduvõimalus (sõltumata alustaja mängust) ainult lõpliku arvu algseisude korral. Siis leidub selline naturaalarv N, et kui laual on rohkem kui N nuppu, siis on alustajal alati võimalus võita. Kuid $N^2 + N + 1 < (N+1)^2$, seega $N^2 + N + 1$ nupu korral saab alustaja esimesel käigul ära võtta ülimalt N^2 nuppu, mistõttu teise mängija avakäigul olles on laual vähemalt $N+1$ nuppu ning eelduse kohaselt saab teine mängija võita sõltumata alustaja edasisest mängust — vastuolu.

14. Tähistame kolmnurgad nii, nagu näidatud joonisel 3, siis saab kirp mistahes kolmnurgalt $A1$ hüpata ainult kolmnurgale $A2$, kolmnurgalt $A2$ ainult kolmnurgale $A1$, kolmnurgalt $B1$ kolmnurgale $B2$, jne. Seega võivad kirbud ühel väikesel kolmnurgal kokku saada ainult juhul, kui nad algul on kõik ühe ja sama tähistusega kolmnurkadel. Teiselt poolt

võivad kirbud selle tingimuse täidetuse korral tõepoolest kokku saada mistahes sellise tähistusega väikesel kolmnurgal (selleks piisab tähele panna, et kirp saab liikuda igalt kolmnurgalt suvalisele sama tähistusega kolmnurgale ning varem kohalejõudnud kirbud saavad ülejäänuid edasi-tagasi hüpates "oodata"). Seega tuleb kontrollida, milliste n väärtuste korral sisaldab n^2 väikesest kolmnurgast koosnev võrdkülgne kolmnurk vähemalt n ühe ja sama tähistusega väikest kolmnurka. See on ilmselt nii mistahes $n \geqslant 8$ korral (sest erinevaid kolmnurkade liike on 8); vahetu kontroll $n = 1, 2, \ldots, 7$ korral näitab, et ainsad arvud, mille korral nõutavaid kolmnurki ei leidu, on $n = 2$ ja $n = 4$.



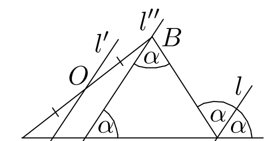
Joonis 3



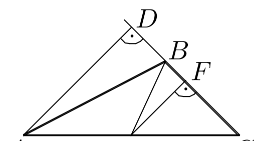
Joonis 4

15. Nummerdame $(2n+1)$-nurga külgede keskpunktid järjekorras arvudega $1, 2, \ldots, 2n{+}1$ ning tipud (samas suunas liikudes ja alustades arvudega 1 ja 2 tähistatud külgede ühisest tipust) *üle ühe* arvudega $4n{+}2, 4n{+}1, \ldots, 2n{+}2$. (Joonisel 4 on näidatud sellise nummerdamise tulemus $n = 3$ korral.) Siis numbriga 1 külje otspunktid on numbritega $4n + 2 - n = 3n + 2$ ja $4n + 2$, numbriga 2 külje otspunktid on numbritega $4n + 2$ ja $3n + 1$, numbriga 3 külje otspunktid on numbritega $3n + 1$ ja $4n + 1$, jne. Näeme, et külje numbri suurenedes 1 võrra selle ühe otspunkti number väheneb 1 võrra, teise otspunkti number aga ei muutu — seega on iga külje juures oleva kolme arvu summa võrdne arvuga $(4n + 2) + 1 + (3n + 2) = 7n + 5$.

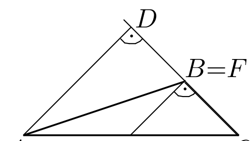
16. Paneme tähele, et punkt E asub kolmnurga küljel AC (mitte selle pikendusel), kuna $|BC| < |AC|$. Olgu F punkti B läbiva ja sirgega l paralleelse sirge l'' lõikepunkt küljega AC (vt. joonist 5), siis $|AE| = |EF|$. Olgu tipu C juures asuva välisnurga suurus 2α, siis $\angle CFB = \alpha$ ja $\angle CBF = \alpha$, s.t. kolmnurk BCF on võrdhaarne ja $|CF| = |BC|$. Nüüd $|CE| = \dfrac{|CA + |CF|}{2} = \dfrac{|CA + |BC|}{2} = 5{,}5$.



Joonis 5



Joonis 6

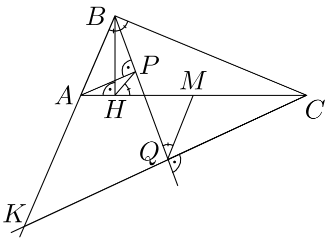


Joonis 7

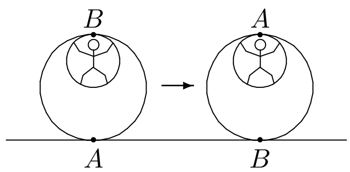
17. Olgu $h = \max(h_A, h_B, h_C)$ ja $m = \min(m_A, m_B, m_C)$. Kui kolmnurga ABC pikim kõrgus ja lühim mediaan on tõmmatud ühest ja samast tipust, siis ilmselt $h \leqslant m$. Olgu nüüd pikim kõrgus AD ja lühim mediaan BE, s.t. $|AD| = h$ ja $|BE| = m$. Olgu F

selline punkt sirgel BC, et $EF \parallel AD$ (vt. joonist 6), siis $m = |EB| \geqslant |EF| = \frac{h}{2}$, s.t. $h \leqslant 2m$. Juht $h = 2m$ on kujutatud joonisel 7. Seega on arvu α minimaalne väärtus 2.

18. Kui $|AB| = |AC|$, siis $H = M = P = Q$. Kui $|AB| \neq |AC|$, siis asuvad punktid H ja M nurga $\angle B$ poolitajast erineval pool ning punktid H ja Q asuvad sirgest PM samal pool. Sirged BA ja CQ ei ole paralleelsed, kusjuures nende lõikepunkt K asetseb lõigu BA pikendusel üle punkti A ning lõigu CQ pikendusel üle punkti Q (vt. joonist 8, vastasel juhul peaks olema $\angle B \geqslant 180^\circ$). Et kolmnurga KBC nurgapoolitaja BQ on ühtlasi selle kolmnurga kõrguseks, siis $|KQ| = |QC|$. Et ka $|AM| = |MC|$, siis $QM \parallel KA$, mistõttu $\angle MQP = \angle PBA$. Teiselt poolt on punktid A, B, P ja H ühel ringjoonel (sest $\angle BPA = \angle BHA = 90^\circ$), mistõttu $\angle PHM = 180^\circ - \angle PHA = \angle PBA$. Seega $\angle MQP = \angle MHP$ ning punktid P, M, Q ja H asuvad ühel ringjoonel.



Joonis 8



Joonis 9

19. Vaatleme kõigepealt olukorda, kus ringjoon $\mathcal{C}_2$ veereb ringjoone $\mathcal{C}_1$ ümbermõõduga $2n\pi R$ võrdse teepikkuse mööda sirgjoont (kusjuures ringjoonte $\mathcal{C}_2$ ja $\mathcal{C}_3$ puutepunkt on kogu aeg maksimaalsel kaugusel ringjoone $\mathcal{C}_2$ puutepunktist selle sirgjoonega). Siis ringjoone $\mathcal{C}_2$ iga poolpöörde jooksul sooritab kosmonaut koos ringjoonega $\mathcal{C}_3$ ühe täispöörde samas suunas (vt. joonist 9). Et ringjoon $\mathcal{C}_2$ teeb oma liikumise jooksul kokku n poolpööret, siis sooritab kosmonaut sel juhul kokku n täispööret. Lõpuks paneme tähele, et ringjoone $\mathcal{C}_2$ tegelik liikumistee sooritab ühe täispöörde vastassuunas ringjoonte $\mathcal{C}_2$ ja $\mathcal{C}_3$ pöörlemise suunale, seega sooritab kosmonaut koos ringjoonega $\mathcal{C}_3$ tegelikult $n - 1$ täispööret.

20. Viisnurga mistahes tipu koordinaatide paarsuste jaoks on neli erinevat võimalust, seega leiduvad kaks viisnurga tippu A ja B, mille vastavad koordinaadid on ühe ja sama paarsusega. Nende tippude vahelise lõigu keskpunkt M on täisarvuliste koordinaatidega. Vaatleme kaht võimalust:

(a) kui tipud A ja B ei ole viisnurga naabertipud, siis viisnurga kumeruse tõttu paikneb punkt M selle sees. Ühendades selle punkti viisnurga kõikide tippudega, saame viis kolmnurka, millest igaühe pindala ei ole väiksem kui $\frac{1}{2}$ (kuna selle kõik tipud on täisarvuliste koordinaatidega) ja mille pindalade summa on võrdne viisnurga pindalaga.

(b) kui tipud A ja B on viisnurga $ABCDE$ naabertipud, siis paikneb punkt M viisnurga küljel AB ning viisnurk $AMCDE$ rahuldab ülesande tingimusi ja on väiksema pindalaga kui viisnurk $ABCDE$. Seega peab mistahes minimaalse pindalaga viisnurga $ABCDE$ korral realiseeruma juht (a).