Matemaatikaolümpiaad “Balti tee ’94”

Tartus, 11. novembril 1994

1. Olgu $a \circ b = a + b - ab$. Leia kõik sellised täisarvukolmikud (x, y, z), et

$$(x \circ y) \circ z + (y \circ z) \circ x + (z \circ x) \circ y = 0 .$$

2. Olgu $a_1, a_2, \ldots, a_9$ mistahes sellised mittenegatiivsed arvud, et $a_1 = a_9 = 0$ ja vähemalt üks nendest arvudest on nullist erinev. Tõesta, et leidub selline indeks i, $2 \leqslant i \leqslant 8$, et kehtib võrratus $a_{i-1} + a_{i+1} < 2a_i$. Kas väide jääb kehtima, kui viimases võrratuses asendada arv 2 arvuga $1{,}9$?

3. Leia avaldise

$$xy + x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$$

suurim väärtus.

4. Kas leidub selline täisarv n, et $\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}$ on ratsionaalarv?

5. Olgu $p(x)$ selline täisarvuliste kordajatega polünoom, et nii võrrand $p(x) = 1$ kui ka võrrand $p(x) = 3$ omab täisarvulist lahendit. Kas võrrand $p(x) = 2$ saab omada kahte erinevat täisarvulist lahendit?

6. Tõesta, et mistahes taandumatu murd $\dfrac{p}{q}$, kus p ja q on positiivsed täisarvud ning q on paaritu, on võrdne murruga $\dfrac{n}{2^k - 1}$ mingite positiivsete täisarvude n ja k korral.

7. Olgu $p > 2$ algarv ja $1 + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + \ldots + \dfrac{1}{(p-1)^3} = \dfrac{m}{n}$, kus m ja n on ühistegurita. Näita, et arv m on arvu p kordne.

8. Näita, et mistahes täisarvu $a \geqslant 5$ korral leiduvad sellised täisarvud b ja c, $c > b > a$, et a, b, c on täisnurkse kolmnurga külgede pikkused.

9. Leia kõik sellised positiivsete täisarvude paarid (a, b), et $2^a + 3^b$ on täisruut.

10. Kui palju positiivseid täisarve rahuldab järgmisi kolme tingimust:
    a) arvu kõik numbrid on hulgast $\{1, 2, 3, 4, 5\}$;
    b) mistahes kahe kõrvutiasuva numbri vahe absoluutväärtus on 1;
    c) arv koosneb 1994 numbrist?

11. Olgu NS ja EW ringjoone $\mathcal{C}$ kaks ristuvat diameetrit. Sirge l puutub ringjoont $\mathcal{C}$ punktis S. Olgu A ja B ringjoone $\mathcal{C}$ kaks punkti, mis on sümmeetrilised diameetri EW suhtes. Tähistame sirge l lõikepunktid sirgetega NA ja NB vastavalt A' ja B'. Näita, et $|SA'| \cdot |SB'| = |SN|^2$.

12. Kolmnurga $A_1A_2A_3$ siseringjoon puutub külgi A_2A_3, A_3A_1 ja A_1A_2 vastavalt punktides S_1, S_2, S_3. Olgu O_1, O_2, O_3 vastavalt kolmnurkade $A_1S_2S_3$, $A_2S_3S_1$ ja $A_3S_1S_2$ siseringjoonte keskpunktid. Tõesta, et sirged O_1S_1, O_2S_2 ja O_3S_3 lõikuvad ühes punktis.

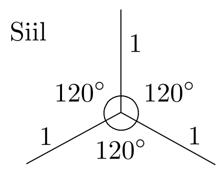
13. Leia vähim selline arv a, et ruut küljepikkusega a võib sisaldada viit ringi raadiusega 1 nii, et mistahes kaks neist ei oma ühist sisepunkti.

14. Olgu kolmnurga nurkade α, β, γ vastas asuvate külgede pikkused vastavalt a, b ja c. Tõesta võrratus

$$a \cdot \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) + b \cdot \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha}\right) + c \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \geqslant 2 \cdot \left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}\right).$$

15. Kas leidub kolmnurk, mille kõikide külgede ja kõrguste pikkused on täisarvud ning mille ümbermõõt on 1995?

16. Imedesaarel elavad Siilid. Iga Siil koosneb kolmest ühise otspunktiga ühiklõigust, kusjuures kõik lõikudevahelised nurgad on 120° (vt joonist 1). Teades, et kõik Siilid lamavad saare pinnal ja et mistahes kaks Siili ei puuduta teineteist, tõesta, et Imedesaarel elab lõplik arv Siile.



Joonis 1

17. Ühes kuningriigis on kuningas otsustanud ehitada 13-le asustamata saarele 25 uut linna niimoodi, et igal saarel oleks vähemalt üks linn. Mistahes eri saartel asuvate linnade paari vahel kavatsetakse sisse seada otselaevaühendus. Leia nende ühenduste vähim võimalik arv.

18. Tasandil on antud n sirget $(n > 2)$. Mistahes kaks sirget on mitteparalleelsed ja mistahes kolm sirget ei lõiku ühes punktis. Nende sirgete iga lõikepunkt on märgendatud ühe naturaalarvuga, mis on 1 ja $n-1$ vahel. Tõesta, et lõikepunktid on võimalik märgendada nii, et iga sirge (kõigi ülejäänud $n-1$ sirgega lõikumisel tekkinud) lõikepunktide märgendite hulgas esinevad kõik arvud 1 kuni $n-1$, siis ja ainult siis, kui n on paarisarv.

19. Imedesaare Salaluurel on Tartus 16 spiooni. Igaüks neist jälgib mõnesid oma kolleege. On teada, et kui spioon A jälgib spiooni B, siis spioon B ei jälgi spiooni A. Mistahes 10 spiooni saab nummerdada nii, et esimene spioon jälgib teist, teine kolmandat, ..., kümnes jälgib esimest. Tõesta, et mistahes 11 spiooni saab nummerdada samal viisil.

20. Võrdkülgne kolmnurk on selle külgedega paralleelsete sirgete abil jagatud 9 000 000 kongruentseks võrdkülgseks kolmnurgaks. Väikeste kolmnurkade iga tipp on värvitud ühega kolmest värvist. Tõesta, et leidub kolm ühte värvi punkti, mis on niisuguse kolmnurga tippudeks, mille küljed on paralleelsed esialgse kolmnurga külgedega.

Ülesannete lahendused

1. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}(x \circ y) \circ z &= x + y + z - xy - yz - xz + xyz = \\ &= (x-1)(y-1)(z-1) + 1 \,.\end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned}&(x \circ y) \circ z + (y \circ z) \circ x + (z \circ x) \circ y = \\ &= 3\big((x-1)(y-1)(z-1)+1\big) \,.\end{aligned}$$

Kui kehtib ülesandes nõutud võrdus, saame $(x-1)(y-1)(z-1) = -1$. Et arvu -1 esitamiseks kolme täisarvu korrutisena (arvestades ka tegurite järjekorda) on neli erinevat võimalust, saame neli nõutava omadusega arvukolmikut $(0,0,0)$, $(0,2,2)$, $(2,0,2)$ ja $(2,2,0)$.

2. a) Kehtigu iga $i = 2, \ldots, 8$ korral võrratus $a_{i-1} + a_{i+1} \geqslant 2a_i$. Olgu $a_k = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant 9} a_i$, siis saame $a_{k-1} = a_k = a_{k+1}$, $a_{k-2} = a_{k-1} = a_k$, jne. Lõpuks jõuame võrduseni $a_1 = a_k$, mis on vastuolus tingimustega $a_1 = 0$ ja $a_k > 0$.

b) Kehtigu nüüd iga $i = 2, \ldots, 8$ korral võrratus $a_{i-1} + a_{i+1} \geqslant 1{,}9a_i$, s.t. $a_{i+1} \geqslant 1{,}9a_i - a_{i-1}$ ning olgu $a_k = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant 9} a_i$. Et kõikide arvude $a_1, \ldots, a_9$ läbikorrutamine ühe ja sama positiivse konstandiga ei muuda olukorda ilmselt mingil viisil, eeldame edaspidi, et $a_k = 1$. Siis $a_{k-1} + a_{k+1} \geqslant 1{,}9$ ja seega $0{,}9 \leqslant a_{k-1}, a_{k+1} \leqslant 1$ ning vähemalt üks arvudest a_{k-1}, a_{k+1} peab olema mitte väiksem kui $0{,}95$. Üldisust kitsendamata eeldame, et $a_{k+1} \geqslant 0{,}95$, ning vaatleme kaht alajuhtu:

b1) Kui $k \geqslant 5$, siis

$$\begin{aligned}1 \geqslant a_{k+1} &\geqslant 0{,}95 > 0 \,; \\ 1 \geqslant a_{k+2} &\geqslant 1{,}9a_{k+1} - a_k \geqslant 1{,}9 \cdot 0{,}95 - 1 = 0{,}805 > 0 \,; \\ a_{k+3} &\geqslant 1{,}9a_{k+2} - a_{k+1} \geqslant 1{,}9 \cdot 0{,}805 - 1 = 0{,}5295 > 0 \,; \\ a_{k+4} &\geqslant 1{,}9a_{k+3} - a_{k+2} \geqslant 1{,}9 \cdot 0{,}5295 - 1 = 0{,}00605 > 0 \,.\end{aligned}$$

Seega igal juhul saame $a_9 > 0$ — vastuolu.

b2) Kui $k \leqslant 4$, siis

$$\begin{aligned}1 \geqslant a_{k-1} &\geqslant 0{,}9 > 0 \,; \\ a_{k-2} &\geqslant 1{,}9a_{k-1} - a_k \geqslant 1{,}9 \cdot 0{,}9 - 1 = 0{,}71 > 0 \,; \\ a_{k-3} &\geqslant 1{,}9a_{k-2} - a_{k-1} \geqslant 1{,}9 \cdot 0{,}71 - 1 = 0{,}349 > 0 \,,\end{aligned}$$

s.t. igal juhul $a_1 > 0$, mis on vastuolus ülesande tingimustega.

3. *Vastus*: antud avaldise suurim väärtus on $\sqrt{2}$.

Ülesandes toodud avaldis on määratud $|x|, |y| \leqslant 1$ korral ning üldisust kitsendamata võime eeldada, et $x, y \geqslant 0$. Tehes esialgses avaldises asendused $x = \cos\alpha$ ja $y = \cos\beta$, kus $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant \frac{\pi}{2}$, saame

$$\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha - \sin\alpha\sin\beta =$$
$$= \cos(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+\beta) = \sqrt{2}\cdot\sin(\alpha+\beta+\frac{\pi}{4})\ ,$$

s.t. avaldise väärtus ei ületa $\sqrt{2}$. Võrdus kehtib, kui $\alpha+\beta+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, s.t. näiteks $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ja $\beta = 0$ ehk $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ja $y = 1$ korral.

4. *Vastus*: selliseid täisarve n ei leidu.

Olgu $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} = \frac{p}{q}$. Siis

$$\begin{aligned}\frac{q}{p} &= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \\ &= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})} = \\ &= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{2}\ .\end{aligned}$$

Saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases}\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1} = \dfrac{p}{q}\ , \\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n-1} = \dfrac{2q}{p}\ ,\end{cases}$$

kust $\sqrt{n+1} = \frac{2q^2+p^2}{2pq}$ ning $4np^2q^2 = 4q^4 + p^4$.

Üldisust kitsendamata võime eeldada, et n, p ja q on kõik positiivsed täisarvud ning arvud p ja q on ühistegurita. Võrdusest $4np^2q^2 = 4q^4 + p^4$ järeldub, et p on paarisarv. Olgu $p = 2P$, siis $4nP^2q^2 = q^4 + 4P^4$, s.t. ka q on paarisarv — vastuolu.

5. *Vastus*: ei saa.

Paneme tähele, et mistahes kahe erineva täisarvu a ja b korral jagub arv $p(a) - p(b)$ arvuga $a - b$. Olgu nüüd a ja b sellised täisarvud, et $p(a) = 1$ ja $p(b) = 3$. Kui c on selline täisarv, et $p(c) = 2$, siis $c - b = \pm 1$ ja $c - a = \pm 1$ — niisuguseid arve c saab aga olla ülimalt üks.

6. Et jäägiklasse mooduli q järgi on lõplik arv, siis leiduvad naturaalarvud i ja j, nii et $i > j$ ja $2^i \equiv 2^j \pmod{q}$. Arv q on arvu $2^i - 2^j = 2^j(2^{i-j} - 1)$ jagaja. Et q on paaritu arv, siis peab q olema arvu $2^{i-j} - 1$ jagaja. Nõutava tulemuse saamiseks piisab nüüd esialgse murru $\frac{p}{q}$ lugejat ja nimetajat korrutada täisarvuga $\frac{2^{i-j} - 1}{q}$.

7. Antud summa sisaldab paarisarvu liikmeid ning on esitatav summana $\frac{p-1}{2}$ liidetavast kujul

$$\frac{1}{k^3} + \frac{1}{(p-k)^3} = \frac{p^3 - 3p^2k + 3pk^2}{k^3(p-k)^3},$$

kus $k = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$. Kõikide selliste avaldiste liitmisel saame murru, mille lugeja sisaldab algarvu p tegurina, nimetaja kõik tegurid on aga väiksemad kui p.

8. Olgu kõigepealt $a = 2i + 1 \geqslant 3$ paaritu arv. Otsime arve b ja c kujul $c = 2k + 1$ ja $b = 2k$, siis peab olema $a^2 = c^2 - b^2 = (2k+1)^2 - (2k)^2 = 4k + 1$, kust $k = i^2 + i$. Ilmselt kehtivad seejuures ka vajalikud võrratused $c > b > a$.

   Kui täisarvud x, y, z on mingi täisnurkse kolmnurga küljepikkusteks (s.t. $z^2 = x^2 + y^2$), siis on sama omadusega ka arvud kx, ky, kz mistahes positiivse täisarvu k korral. Seega on ülesande väide tõestatud mistahes sellise arvu $a \geqslant 3$ jaoks, mille algtegurite hulgas leidub paarituid arve. Et arvu 8 jaoks leidub sobiv kolmik $(8, 15, 17)$, siis leidub vastav kolmik ka mistahes arvu 2^k, $k \geqslant 3$ korral.

9. *Vastus*: $a = 4$, $b = 2$.

   Vaadeldes võrdust $2^a + 3^b = n^2$ mooduli 3 järgi leiame, et a peab olema paarisarv. Et n on ilmselt paaritu, võtame $a = 2x$, $n = 2y + 1$ ning saame $4^x + 3^b = (2y+1)^2 = 4y^2 + 4y + 1$. Seega $3^b \equiv 1 \pmod 4$, s.t. $b = 2z$ mingi positiivse täisarvu z korral. Nüüd saame $4^x + 9^z = (2y+1)^2$, kust $4^x = (2y+1-3^z)(2y+1+3^z)$. Võrduse paremal pool olevad tegurid on mõlemad paarisarvud, ent vaid üks neist jagub neljaga, seega $2y + 1 - 3^z = 2$ ja $2y + 1 + 3^z = 2^{2x-1}$. Neist kahest võrdusest saame $2 \cdot 3^z = 2^{2x-1} - 2$ ja $3^z = 4^{x-1} - 1$. Vaadeldes viimast võrdust mooduli 10 järgi, näeme, et $z = 4d + 1$ ja $x - 1 = 2e + 1$, kus d ja e on mingid mittenegatiivsed täisarvud. Asendades saame $4^{2e+1} - 1 = 3^{4d+1} = 3 \cdot (80+1)^d$. Kui $d \geqslant 1$, siis ka $e \geqslant 1$, mis annab vastuolu (arendades Newtoni binoomvalemi järgi ja viies kõik liikmed vasakule poole, näeme, et kõik liidetavad peale ühe jaguvad arvuga 16). Seega $e = d = 0$ ning $z = 1$, $b = 2$, $x = 2$ ja $a = 4$ ning saame hästi tuttava võrduse $2^4 + 3^2 = 4^2 + 3^2 = 5^2$.

10. *Vastus*: ülesande tingimustele vastavaid arve on $8 \cdot 3^{996}$.

    Vaatleme kõiki täpselt $2n$-kohalisi naturaalarve, mis rahuldavad ülesande tingimusi (a) ja (b). Leidugu niisuguseid arve, mille algusnumber on 1, 2, 3, 4 ja 5, vastavalt a_n, b_n, c_n, d_n ja e_n tükki. Kui $n = 1$, saame $a_1 = 1$ (arv 12), $b_1 = 2$ (arvud 21 ja 23), $c_1 = 2$ (arvud 32 ja 34), $d_1 = 2$ (arvud 43 ja 45) ning $e_1 = 1$ (arv 54). Paneme tähele, et $c_1 = a_1 + e_1$.

Olgu nüüd $n > 1$, s.t. vaadeldavad arvud on vähemalt 4-kohalised. Kui sellise arvu esimene number on 1, siis teine number peab olema 2 ja kolmas number võib olla 1 või 3. Siit saame võrduse

$$a_n = a_{n-1} + c_{n-1}\ . \tag{1}$$

Samuti leiame, et esimese numbri 5 korral peab teine number olema 4 ja kolmas kas 3 või 5. Seega

$$e_n = c_{n-1} + e_{n-1}\ . \tag{2}$$

Kui vaadeldav arv algab numbritega 23, siis kolmas number peab olema 2 või 4. Kui arv algab numbritega 21, peab kolmas number olema 2. Niisiis

$$b_n = 2b_{n-1} + d_{n-1}\ . \tag{3}$$

Analoogiliselt saame

$$d_n = b_{n-1} + 2d_{n-1}\ . \tag{4}$$

Kui arv algab numbritega 32, siis kolmas number peab olema 1 või 3, algusnumbrite 34 korral aga 3 või 5. Seega

$$c_n = a_{n-1} + 2c_{n-1} + e_{n-1}\ . \tag{5}$$

Võrdustest (1), (2) ja (5) saame $c_n = a_n + e_n$ — see kehtib iga $n = 1, 2, 3, \ldots$ korral. Teiselt poolt, liites võrdused (1)–(5) saame

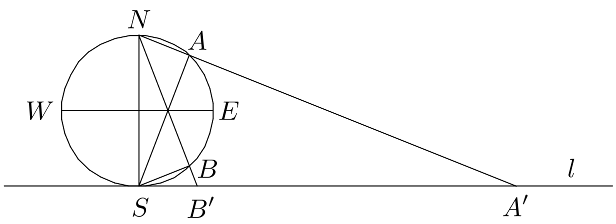
$$a_n + b_n + c_n + d_n + e_n = 2a_{n-1} + 3b_{n-1} + 4c_{n-1} + 3d_{n-1} + 2e_{n-1}\ ,$$

millest võrdust $c_{n-1} = a_{n-1} + e_{n-1}$ arvestades saame

$$a_n + b_n + c_n + d_n + e_n = 3(a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} + d_{n-1} + e_{n-1})\ .$$

Seega on ülesande tingimusi (a) ja (b) rahuldavaid $2n$-kohalisi arve $N(2n) = N(2)\cdot 3^{n-1}$. Arvestades, et $N(2) = 8$, saame $N(1994) = 8 \cdot 3^{996}$.

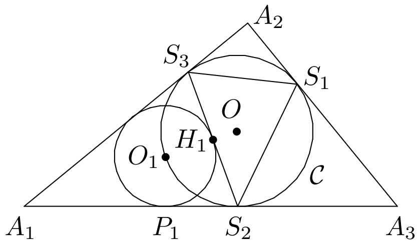
11. Kuna $\angle NAS = \angle NBS = 90°$ (vt. joonist 2), siis kolmnurgad $NA'S$ ja NSA ning SNB ja $B'NS$ on sarnased. Et kolmnurgad NSA ja SNB on kongruentsed, siis kolmnurgad $NA'S$ ja $B'NS$ on sarnased ning $\dfrac{|SA'|}{|SN|} = \dfrac{|SN|}{|SB'|}$, kust $|SA'| \cdot |SB'| = |SN|^2$.



Joonis 2

12. Tõestame, et sirged S_1O_1, S_2O_2 ja S_3O_3 on kolmnurga $S_1S_2S_3$ nurgapoolitajateks. Olgu O ja r kolmnurga $A_1A_2A_3$ siseringjoone $\mathcal{C}$ keskpunkt ja raadius ning olgu r_1, P_1 ja H_1 kolmnurga $A_1S_2S_3$ siseringjoone (keskpunktiga O_1) raadius ja puutepunktid vastavalt külgedega A_1S_2 ja S_2S_3 (vt. joonist 3). Näitamaks, et S_1O_1 on nurga $S_3S_1S_2$ poolitaja, piisab tõestada, et punkt O_1 asub ringjoonel $\mathcal{C}$, kuna sel juhul on kaared O_1S_2 ja O_1S_3 ilmselt võrdsed ning $\angle S_2S_1O_1$ ja $\angle S_3S_1O_1$ on seega võrdsetele kaartele toetuvad piirdenurgad. Selleks paneme kõigepealt tähele, et $A_1S_2S_3$ on võrdhaarne kolmnurk ja seega punktid H_1 ja O_1 asuvad mõlemad sirgel A_1O. Nüüd piisab näidata, et $|OH_1| = r - r_1$:

$$\frac{r-r_1}{r} = 1 - \frac{r_1}{r} = 1 - \frac{|O_1P_1|}{|OS_2|} = 1 - \frac{|P_1A_1|}{|S_2A_1|} = \frac{|S_2A_1| - |P_1A_1|}{|S_2A_1|} =$$
$$= \frac{|S_2P_1|}{|S_2A_1|} = \frac{|S_2H_1|}{|S_2A_1|} = \frac{|OH_1|}{|OS_2|} = \frac{|OH_1|}{r}\,.$$



Joonis 3

13. *Vastus*: sellise ruudu vähim küljepikkus on $2+2\sqrt{2}$.

Olgu $PQRS$ ruut (küljepikkusega a), mis rahuldab ülesande tingimusi, siis ilmselt $a > 2$. Olgu $P'Q'R'S'$ ruut, mis asub ruudu $PQRS$ sees ning mille küljed on paralleelsed ruudu $PQRS$ vastavate külgedega ja asuvad nendest kaugusel 1, siis ruudu $P'Q'R'S'$ küljepikkus on $a-2$. Kui viis ringi raadiusega 1 asuvad tervenisti ruudus $PQRS$, siis nende keskpunktid asuvad ruudus $P'Q'R'S'$. Jaotades ruudu $P'Q'R'S'$ neljaks ühesuuruseks ruuduks küljepikkusega $\frac{a}{2}-1$ ja rakendades Dirichlet' printsiipi, leiame, et vähemalt kahe vaadeldava ringjoone keskpunktid peavad asuma ühes neljast väikesest ruudust. Seega peab väikese ruudu diagonaali pikkus olema vähemalt 2, millest leiame $a \geqslant 2+2\sqrt{2}$. Teiselt poolt, kui $a = 2+2\sqrt{2}$, siis saame paigutada ruutu $PQRS$ viis ringi raadiusega 1 nii, et nende keskpunktid on ruudu $PQRS$ keskpunktis ja punktides P', Q', R', S'.

14. Kui $a > b$, siis ilmselt $\alpha > \beta$, ning $a < b$ korral vastavalt $\alpha < \beta$. Seetõttu $(a-b)(\alpha-\beta) \geqslant 0$ ning $a\alpha + b\beta \geqslant a\beta + b\alpha$. Jagades viimase võrduse korrutisega $\alpha\beta$, saame

$$\frac{a}{\beta} + \frac{b}{\alpha} \geqslant \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}\,. \qquad (6)$$

Analoogiliselt saame võrratused

$$\frac{a}{\gamma} + \frac{c}{\alpha} \geqslant \frac{a}{\alpha} + \frac{c}{\gamma} \tag{7}$$

ja

$$\frac{b}{\gamma} + \frac{c}{\beta} \geqslant \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}\,. \tag{8}$$

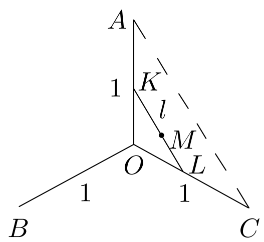
Ülesandes antud võrratuse saame, liites võrratused (6)–(8).

15. *Vastus*: sellist kolmnurka ei leidu.

Olgu ABC kolmnurk, mille kõikide külgede ja kõrguste pikkused on täisarvud. Koosinusteoreemist saame siis, et $\cos\angle A$, $\cos\angle B$ ja $\cos\angle C$ on ratsionaalarvud. Olgu AH kolmnurga ABC tipust A tõmmatud kõrgus, kusjuures punkt H asub küljega BC määratud sirgel. Et $|BH|$ ja $|CH|$ on ratsionaalarvud ning $|BH|^2$ ja $|CH|^2$ täisarvud, siis on ka $|BH|$ ja $|CH|$ täisarvud. Kui täisarvud $|BH|$ ja $|CH|$ on erineva paarsusega, siis on $|AB|$ ja $|AC|$ samuti erineva paarsusega ning $|BC|$ on paaritu arv. Kui arvud $|BH|$ ja $|CH|$ on sama paarsusega, siis on ka $|AB|$ ja $|AC|$ sama paarsusega ning $|BC|$ on paarisarv. Mõlemal juhul on kolmnurga ABC ümbermõõt paarisarv ega saa olla võrdne arvuga 1995.

16. Piisab tõestada, et kui kahe Siili keskpunktide vaheline kaugus on väiksem kui 0,2, siis need Siilid omavad ühist punkti. Tõepoolest, olgu O ja M kahe Siili keskpunktid ning $|OM| < 0{,}2$. Olgu A, B ja C esimese Siili okaste otspunktid, l lõiguga AC paralleelne sirge, mis läbib punkti M, ning K ja L sirge l lõikepunktid esimese Siili okastega OA ja OC (vt. joonist 4). Et $|AC| = \sqrt{3}$, siis $|KL| < \dfrac{0{,}2}{0{,}5} \cdot |AC| < 1$. Kuna vähemalt üks teise Siili okas on suunatud kolmnurga OKL sisse, siis see okas lõikub esimese Siiliga.

Märkus: Kui eeldada, et Siilid on võimelised liigutama oma okkaid nii, et nurgad Siili okaste vahel võivad omandada mistahes positiivseid väärtusi, siis võiks Imedesaarel elada lõpmata palju Siile.



Joonis 4

17. *Vastus*: vähim võimalik laevaühenduste arv on 222.

Olgu $a_1, \ldots, a_{13}$ linnade arvud igal saarel. Oletame, et leiduvad indeksid i ja j, nii et $a_i \geqslant a_j > 1$, ning olgu A suvaline linn j-ndal saarel. Linnast A lähtuvate laevaliinide arv on siis $25 - a_j$. Kui me paigutaksime linna A ümber i-ndale saarele, oleks sellest linnast lähtuvate laevaliinide arv $25 - (a_i + 1)$ ning kõik ülejäänud laevaliinid jääksid endiseks. Järelikult saavutatakse laevaliinide vähim võimalik arv juhul, kui 13 linna paiknevad ühel saarel ja igaühel ülejäänud 12 saarest asub üksainus linn. Sellisel juhul on laevaliine kokku $13 \cdot 12 + \frac{12 \cdot 11}{2} = 222$.

18. Olgu sirgete lõikepunktid märgendatud ülesandes nõutud viisil. Kui mingi kahe sirge lõikepunkt on märgendatud arvuga 1, siis ükski nende sirgete lõikepunktidest ülejäänud $n-2$ sirgega ei saa olla märgendiga 1. Seega peab punkte märgendiga 1 olema täpselt $\frac{n}{2}$, s.t. n peab olema paarisarv.

Olgu nüüd n paarisarv. Tähistame sirged sümbolitega $l_1, l_2, \ldots, l_n$ ning vaatleme järgmisi tabeleid:

$$\begin{array}{cc} l_1 & l_2 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} l_3 & l_4 & \ldots & l_{n/2+1} \\ l_n & l_{n-1} & \ldots & l_{n/2+2} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} l_1 & l_n \end{array} \quad \begin{array}{cccc} l_2 & l_3 & \ldots & l_{n/2} \\ l_{n-1} & l_{n-2} & \ldots & l_{n/2+1} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} l_1 & l_{n-1} \end{array} \quad \begin{array}{cccc} l_n & l_2 & \ldots & l_{n/2-1} \\ l_{n-2} & l_{n-3} & \ldots & l_{n/2} \end{array}$$

jne.

(siin igas järgmises tabelis on sirged $l_2, \ldots, l_n$ eelmise tabeliga võrreldes nihutatud päripäeva ühe koha võrra). Vastavalt neile $n-1$ tabelile jaotame sirged paaridesse $n-1$ erineval viisil, valides sirge l_1 paariliseks tema kõrval asuva sirge ja iga ülejäänud sirge paariliseks tabelis tema all või kohal asuva sirge. Nüüd võime märgendada arvuga i $(i = 1, \ldots, n-1)$ kõik need lõikepunktid, mis vastavad sirgete paaridele i-nda tabeli järgi.

19. Nimetame spioone A ja B teineteise suhtes *neutraalseteks*, kui kumbki neist teist ei jälgi.

Tähistame spioonid sümbolitega $A_1, A_2, \ldots, A_{16}$. Olgu a_i, b_i ja c_i vastavalt spiooni A_i jälgivate, spiooni A_i poolt jälgitavate ja spiooni A_i suhtes neutraalsete spioonide arv. Ilmselt

$$\begin{aligned} a_i + b_i + c_i &= 15\,; \\ a_i + c_i &\leqslant 8\,; \\ b_i + c_i &\leqslant 8 \end{aligned}$$

iga $i = 1, \ldots, 16$ korral (kui viimased kaks tingimust ei oleks mõlemad täidetud, saaksime leida 10 spiooni, keda ei saa nummerdada ülesandes nõutud viisil). Neist võrdustest ja võrratustest leiame $c_i \leqslant 1$, s.t. iga spioon võib olla neutraalne mitte rohkem kui ühe oma kolleegi suhtes.

Oletame nüüd, et leiduvad niisugused 11 spiooni, keda ei ole võimalik nõutaval viisil nummerdada. Olgu B suvaline spioon nende hulgast ja tähistame ülejäänud 10 spiooni sümbolitega $C_1, \ldots, C_{10}$ nii, et spioon C_1 jälgib spiooni $C_2, \ldots$, spioon C_{10} jälgib spiooni C_1. Oletame, et spioonide $C_1, \ldots, C_{10}$ hulgas pole spiooni B suhtes neutraalseid. Siis juhul, kui C_1 jälgib spiooni B, ei saa B jälgida spiooni C_2 (vastasel juhul saaksime vaadeldavad spioonid nõutaval viisil nummerdada järjekorras $C_1, B, C_2, \ldots, C_{10}$) — niisiis peab C_2 jälgima spiooni B. Et spioonide $C_1, \ldots, C_{10}$ hulgas peab leiduma neid, kes jälgivad spiooni B, siis jõuame analoogiliselt arutledes järeldusele, et kõik need spioonid jälgivad spiooni B — vastuolu. Niisiis peab igaüks vaadeldava 11 spiooni hulgast olema neutraalne täpselt ühe spiooni suhtes ülejäänud kümnest, see ei ole aga võimalik.

20. Loeme suure kolmnurga külge AB “horisontaalseks” ja oletame vastuväiteliselt, et ülesandes esitatud väide ei kehti. Küljel AB asub 3001 väikeste kolmnurkade tippu $A = A_0, A_1, \ldots, A_{3000} = B$, mis on värvitud 3 värviga. Vähemalt 1001 neist peavad seega olema mingit üht värvi, näiteks punased. Mistahes kahe punase tipu A_k ja A_n $(k < n)$ jaoks leidub väikeste kolmnurkade kõikide tippude hulgas täpselt üks selline tipp B_{kn}, et kolmnurk $B_{kn}A_kA_n$ on võrdkülgne. Erinevate arvupaaride (k, n) korral on ka tipud B_{kn} erinevad, seega on meil vähemalt $C_{1001}^2 > 500000$ niisugust tippu, millest ükski ei saa olla punane. Et kõik need tipud paiknevad 3000 erineval horisontaaljoonel, siis leidub selline horisontaaljoon L, mis sisaldab rohkem kui 160 niisugust tippu. Vähemalt 81 neist peavad olema värvitud ühega kahest ülejäänud värvist, näiteks siniseks. Iga kahe sinise tipu B_{kn} ja B_{ml} $(k < n,\ m < l)$ jaoks horisontaaljoonelt L leidub üks ja ainult üks niisugune tipp C_{knml}, mis rahuldab järgmist kaht tingimust:

1) tipp C_{knml} asub horisontaaljoonest L ülalpool;
2) kolmnurk $C_{knml}B_{kn}B_{ml}$ on võrdkülgne.

Seejuures $C_{knml} = B_{pq}$, kus $p = \min(k, m)$ ja $q = \max(n, l)$.

Erinevate tippude B_{kn}, B_{ml} korral on ka tipud C_{knml} erinevad, seega on meil vähemalt $C_{81}^2 > 3200$ niisugust tippu, mis ei saa olla ei punased ega sinised. Et nende tippude arv ületab horisontaaljoonte arvu, peavad mingid kaks tippu C_{knml} ja C_{pqrs} asuma ühel ja samal horisontaaljoonel. Neile kahele tipule vastab omakorda mingi tipp $D_{knmlpqrs}$, nii et kolmnurk $D_{knmlpqrs}C_{knml}C_{pqrs}$ on võrdkülgne. Tipp $D_{knmlpqrs}$ ei saa aga olla värvitud ühegagi antud kolmest värvist — vastuolu.

Märkus: Suure kolmnurga minimaalne suurus, mille korral kehtib ülaltooduga sarnane arutlus, on 2557.