Matemaatikaolümpiaad “Balti tee ’93”

Riias, 13. novembril 1993

1. Olgu $\overline{a_1a_2a_3}$ ja $\overline{a_3a_2a_1}$ kolmekohalised kümnendsüsteemis arvud, kusjuures a_1, a_3 on erinevad numbrid, millest kumbki pole null. Nende arvude ruudud on vastavalt viiekohalised arvud $\overline{b_1b_2b_3b_4b_5}$ ja $\overline{b_5b_4b_3b_2b_1}$. Leia kõik sellised kolmekohalised arvud.

2. Kas leiduvad sellised positiivsed täisarvud $a > b > 1$, et iga positiivse täisarvu k jaoks leidub positiivne täisarv n, nii et $an + b$ on mingi positiivse täisarvu k. aste?

3. Nimetame naturaalarvu “huvitavaks”, kui see on kahe (mitte tingimata erineva) algarvu korrutis. Kui mitu järjestikust naturaalarvu (maksimaalselt) võivad kõik olla “huvitavad”?

4. Leia kõik täisarvud n, mille korral
$$\sqrt{\frac{25}{2} + \sqrt{\frac{625}{4} - n}} + \sqrt{\frac{25}{2} - \sqrt{\frac{625}{4} - n}}$$
on täisarv.

5. Tõesta, et arv $n^{12} - n^8 - n^4 + 1$ jagub arvuga 2^9 iga paaritu naturaalarvu n korral.

6. Olgu kaks funktsiooni $f(x)$ ja $g(x)$ defineeritud iga $2 < x < 4$ korral ning olgu selliste x väärtuste korral rahuldatud tingimused $2 < f(x) < 4$, $2 < g(x) < 4$, $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ ja $f(x) \cdot g(x) = x^2$. Tõesta, et $f(3) = g(3)$.

7. Leia järgmise võrrandisüsteemi täisarvulised lahendid:
$$\begin{cases} z^x = y^{2x} \\ 2^z = 4^x \\ x + y + z = 20\,. \end{cases}$$

8. Leia kõigi selliste positiivsete täisarvude summa, mille numbrid moodustavad kas rangelt kasvava või rangelt kahaneva jada.

9. Lahenda võrrandisüsteem
$$\begin{cases} x^5 = y + y^5 \\ y^5 = z + z^5 \\ z^5 = t + t^5 \\ t^5 = x + x^5\,. \end{cases}$$

10. Olgu $a_1, \ldots, a_n$ ja $b_1, \ldots, b_n$ kaks lõplikku jada, mis koosnevad kokku $2n$ erinevast reaalarvust. Järjestades kummagi jada elemendid kasvavas järjekorras, saame uued jadad $a'_1, \ldots, a'_n$ ja $b'_1, \ldots, b'_n$. Tõesta, et

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i - b_i| \geqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a'_i - b'_i| .$$

11. Võrdkülgne kolmnurk on jaotatud n^2 kongruentseks võrdkülgseks kolmnurgaks. Ühes nende kolmnurkade tippudest asub ämblik, mingis teises aga kärbes. Kordamööda saab kumbki neist liikuda suvalisse naabertippu. Tõesta, et ämblikul on igal juhul võimalik kärbes kinni püüda.

12. Kuningriigis on 13 linna. Mõnede linnapaaride vahel on kahesuunalised vahepeatusteta bussi-, rongi- ja/või lennuliinid. Milline on vähim võimalik liinide koguarv, kui igast linnast on võimalik sõita igasse teise linna, kasutades seejuures mistahes kaht transpordiliiki ja mitte kasutades kolmandat?

13. Võrdkülgne kolmnurk ABC on jaotatud 100 kongruentseks võrdkülgseks kolmnurgaks. Kui mitu väikeste kolmnurkade tippu on maksimaalselt on võimalik välja valida, nii et ükski paar valitud tippudest ei asuks kolmnurga ABC mõne küljega paralleelsel sirgel?

14. Ruut on jaotatud 16 võrdseks ruuduks, mille tipud määravad tasandil 25 erinevat punkti. Kui mitu neist punktidest tuleb minimaalselt eemaldada, et ükski nelik allesjäänud punktidest ei asuks mõne ruudu tippudes, mille küljed on paralleelsed esialgse ruudu külgedega?

15. Kahe kuubikujulise täringu igale tahule kirjutatakse mingi positiivne täisarv. Neid täringuid veeretatakse ja seejärel leitakse nende ülemistel tahkudel olevate arvude summa. Kas on võimalik kirjutada arvud täringute tahkudele nii, et võimalikud summad oleksid 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 ja 13 ning kõik need summad esineksid võrdse tõenäosusega?

16. Kaks ringjoont, mõlemad raadiusega r, paiknevad tasandil teineteist lõikamata. Üks sellel tasandil asuv sirge lõikab esimest ringjoont punktides A, B ja teist ringjoont punktides C, D nii, et $|AB| = |BC| = |CD| = 14\,\mathrm{cm}$. Teine sirge lõikab neid ringjooni vastavalt punktides E, F ja G, H nii, et $|EF| = |FG| = |GH| = 6\,\mathrm{cm}$. Leia raadius r.

17. Tasandil asetsevad kolm paarikaupa mitteparalleelset sirget. Kolm punkti liiguvad mööda neid sirgeid erinevate konstantsete kiirustega (üks punkt igal sirgel), kusjuures see liikumine on kestnud lõpmata kaua ja jätkub lõpmata kaua tulevikus. Kas on võimalik määrata need kolm sirget ning kolme punkti kiirused ja asukohad "nullhetkel" nii, et need punktid ühelgi ajahetkel minevikus, olevikus ega tulevikus ei paikneks ühel sirgel?

18. Kolmnurgas ABC on $|AB| = 15$, $|BC| = 12$, $|AC| = 13$. Selle kolmnurga mediaan AM ja nurgapoolitaja BK lõikuvad punktis O (seejuures $M \in BC$, $K \in AC$). Olgu $OL \perp AB$, kus $L \in AB$. Tõesta, et $\angle OLK = \angle OLM$.

19. Olgu O kumera nelinurga $ABCD$ ümberringjoone keskpunkt. Nurgad $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$ ja $\angle DOA$ (mingis järjekorras võetuna) on sama suured kui nelinurga $ABCD$ nurgad. Tõesta, et $ABCD$ on ruut.

20. Olgu Q ühikkuup. Nimetame tetraeedrit “ilusaks”, kui kõik selle servad on võrdse pikkusega ja kõik selle tipud asuvad kuubi Q pinnal. Leia “ilusa” tetraeedri ruumala kõik võimalikud väärtused.

Ülesannete lahendused

1. Eeldame, et $a_1 > a_3 > 0$. Kuna arvu $\overline{a_1a_2a_3}$ ruut peab olema viiekohaline arv, saame $a_1 \leqslant 3$. Nüüd näitab otsene juhtude läbivaatus, et $\overline{a_1a_2a_3}$ saab olla kas 301, 311, 201, 211 või 221.

2. Olgu $a = 6$, $b = 3$ ning tähistame $x_n = an + b$. Siis saame mistahes naturaalarvude l ja m korral $x_l x_m = x_{6lm+3(l+m)+1}$. Seega arvude x_n kõik astmed kuuluvad samasse jadasse.

3. Kolm järjestikust arvu $33 = 3 \cdot 11$, $34 = 2 \cdot 17$ ja $35 = 5 \cdot 7$ on kõik "huvitavad". Teisest küljest, iga nelja järjestikuse arvu hulgas leidub arv kujul $4k$, mis on "huvitav" ainult juhul $k = 1$. Siis aga on nende nelja arvu seas arv 3 või arv 5, mis ei ole "huvitav".

4. Tähistame

$$p = \sqrt{\frac{25}{2} + \sqrt{\frac{625}{4} - n}} + \sqrt{\frac{25}{2} - \sqrt{\frac{625}{4} - n}} = \sqrt{25 + 2\sqrt{n}}\ ,$$

siis $n = \left(\dfrac{p^2 - 25}{2}\right)^2$, s.t. p on paaritu arv ja $p \geqslant 5$. Kui $p \geqslant 9$, siis $n > \dfrac{625}{4}$ ja esialgse avaldise väärtus ei ole määratud. Kaks järelejäänud väärtust $p = 5$ ja $p = 7$ annavad vastavalt $n = 0$ ja $n = 144$.

5. Lahutame avaldise tegureiks:

$$n^{12} - n^8 - n^4 + 1 = (n^4 + 1)(n^2 + 1)^2(n - 1)^2(n + 1)^2$$

ning paneme tähele, et üks kahest paarisarvust $n - 1$ ja $n + 1$ jagub arvuga 4.

6. Tähistame $h(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, siis $g(x) = \dfrac{x^2}{f(x)} = \dfrac{x}{h(x)}$ ja $g(f(x)) = \dfrac{f(x)}{h(f(x))} = x$, kust $h(f(x)) = \dfrac{f(x)}{x} = h(x)$. Induktsiooniga saame kergesti näidata, et $h(f^{(k)}(x)) = h(x)$ iga naturaalarvu k korral, kus $f^{(k)}$ tähistab avaldist $f(f(\ldots f(x)\ldots))$. Nüüd

$$f^{(k+1)}(x) = f(f^{(k)}(x)) = f^{(k)}(x) \cdot h(f^{(k)}(x)) = f^{(k)}(x) \cdot h(x)\ ,$$

seega iga naturaalarvu k korral $\dfrac{f^{(k+1)}(x)}{f^{(k)}(x)} = h(x)$. Niisiis

$$\frac{f^{(k)}(x)}{x} = \frac{f^{(k)}(x)}{f^{(k-1)}(x)} \cdot \ldots \cdot \frac{f(x)}{x} = (h(x))^k$$

ja iga k jaoks $\dfrac{f^{(k)}(3)}{3} = (h(3))^k \in \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$. See on võimalik ainult juhul, kui $h(3) = 1$ ja seega $f(3) = g(3) = 3$.

7. Teisest ja kolmandast võrrandist saame $z = 2x$ ja $x = \dfrac{20-y}{3}$. Nende seoste asendamine esimesse võrrandisse annab $\left(\dfrac{40-2y}{3}\right)^x = \left(y^2\right)^x$. Kuna $x \neq 0$ (vastasel juhul saame esimeses võrrandis avaldise 0^0, mida harilikult ei loeta määratuks), siis saame $y^2 = \pm\dfrac{40-2y}{3}$ (juht '$-$' tekib ainult paarisarvulise x korral). Võrrandil $y^2 = -\dfrac{40-2y}{3}$ täisarvulised lahendid puuduvad; võrrandist $y^2 = \dfrac{40-2y}{3}$ saame $y = -4$, $x = 8$, $z = 16$ (teine lahend $y = \dfrac{10}{3}$ ei ole täisarv).

   Märkus: Kui loeme $0^0 = 1$, siis saame lisalahendi $x = 0$, $y = 20$, $z = 0$. Definitsioon 0^0 lisalahendeid ei anna.

8. Tähistame sümbolitega I ja D nende positiivsete täisarvude hulgad, mille numbrid moodustavad vastavalt rangelt kasvava ja rangelt kahaneva jada. Olgu D_0, D_1, D_2 ja D_3 hulga D alamhulgad, mis koosnevad vastavalt numbriga 9 algavatest, numbriga 9 mittealgavatest, numbriga 0 lõppevatest ning numbriga 0 mittelõppevatest arvudest. Tähistagu $S(A)$ kõigi hulka A kuuluvate arvude summat. Kõik arvud hulgas I on saadavad arvust 123456789 selle mõnede numbrite kustutamise teel. Seega iga $k = 0, 1, \ldots, 9$ jaoks leidub hulgas I C_9^k k-kohalist arvu (arvu 0 loeme 0-kohaliseks). Igale k-kohalisele arvule $a \in I$ saame üheselt vastavusse seada arvud $b_0 \in D_0$, $b_1 \in D_1$ ja $b_3 \in D_3$, nii et

$$\begin{aligned} a + b_0 &= 999\ldots9 = 10^{k+1} - 1\ ; \\ a + b_1 &= 99\ldots9 = 10^k - 1\ ; \\ a + b_3 &= 111\ldots10 = \frac{10}{9}(10^k - 1)\ . \end{aligned}$$

   Seega

$$\begin{aligned} S(I) + S(D_0) &= \sum_{k=0}^{9} C_9^k(10^{k+1} - 1) = 10 \cdot 11^9 - 2^9\ ; \\ S(I) + S(D_1) &= \sum_{k=0}^{9} C_9^k(10^k - 1) = 11^9 - 2^9\ ; \\ S(I) + S(D_3) &= \frac{10}{9}(11^9 - 2^9)\ . \end{aligned}$$

   Kuna $S(D_0) + S(D_1) = S(D_2) + S(D_3) = S(D)$ ja $S(D_2) = 10S(D_3)$, saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2S(I) + S(D) = 11^{10} - 2^{10} \\ S(I) + \dfrac{1}{11}S(D) = \dfrac{10}{9}(11^9 - 2^9)\ , \end{cases}$$

kust

$$S(I)+S(D)=\frac{80}{81}\cdot 11^{10}-\frac{35}{81}\cdot 2^{10}\ .$$

See summa sisaldab kõik ühekohalised arvud kahekordselt, seepärast on lõppvastuseks

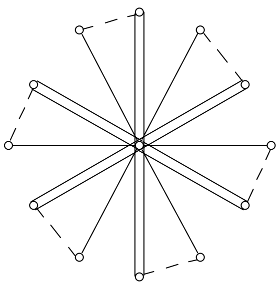
$$\frac{80}{81}\cdot 11^{10}-\frac{35}{81}\cdot 2^{10}-45=25617208995\ .$$

9. Liites kõik neli võrrandit, saame $x+y+z+t=0$. Teisest küljest peavad arvud x, y, z, t olema üheaegselt positiivsed, negatiivsed või võrdsed nulliga. Seega on ainukeseks lahendiks $x=y=z=t=0$.

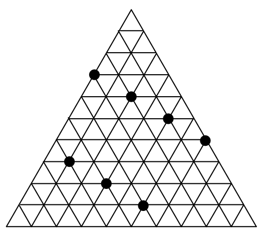
10. Olgu m selline indeks, et $|a'_m-b'_m|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|a'_i-b'_i|=c$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $a'_m>b'_m$. Vaatleme arve $a'_m,a'_{m+1},\ldots,a'_n$ ja $b'_1,b'_2,\ldots,b'_m$. Kuna neid arve on kokku $n+1$ ja kummaski esialgses jadas on n elementi, siis peab leiduma selline indeks j, et a_j esineb arvude $a'_m,a'_{m+1},\ldots,a'_n$ seas ning b_j esineb arvude $b'_1,b'_2,\ldots,b'_m$ seas. Kuna $b_j\leqslant b'_m<a'_m\leqslant a_j$, siis saame $|a_j-b_j|\geqslant|a'_m-b'_m|=c$ ja $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i-b_i|\geqslant c=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|a'_i-b'_i|$.

11. Võtame suure kolmnurga ühe külje selle aluseks. Siis on ämblikule sobiv strateegia näiteks järgmine:
    1) Liikuda suure kolmnurga alumisse vasakusse tippu;
    2) Seni, kuni kärbes asub ämblikust kõrgemal, liikuda kolmnurga vasakut külge pidi ülespoole;
    3) Jõudnud kärbsega samale horisontaaljoonele, säilitada see olukord ja samal ajal liikuda paremale (täpsemalt: liikuda "paremale", "paremale-üles" või "paremale-alla" sõltuvalt kärbse viimasest käigust).

12. Näide 18 liini jaoks on näidatud joonisel 1 (kus ühekordsed, kahekordsed ja katkendjooned tähistavad kolme erinevat transpordiliiki). Teiselt poolt saab 13 tipuga graaf saab olla sidus vaid siis, kui tal on vähemalt 12 serva, s.t. iga kahe transpordiliigi peale kokku peab liine olema vähemalt 12. Seega kõigi liinide kahekordne arv on vähemalt $12+12+12=36$.



Joonis 1



Joonis 2

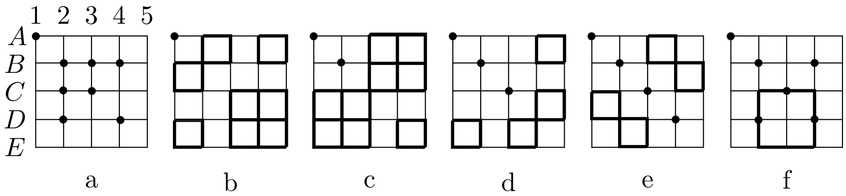
13. Näide 7 tipu jaoks on toodud joonisel 2. Oletame, et meil on õnnestunud valida 8 ülesande tingimusi rahuldavat tippu. Olgu iga väikese kolmnurga kõrgus 1 ning tähistagu a_i, b_i ja c_i vastavalt i. punkti kaugusi suure kolmnurga külgedest. Iga $i = 1, 2, \ldots, 8$ korral kehtivad võrratused $a_i, b_i, c_i \geqslant 0$ ja võrdus $a_i + b_i + c_i = 10$. Seega

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_8) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_8) + (c_1 + c_2 + \ldots + c_8) = 80 .$$

Teiselt poolt pole ükski sulgudes olev summa väiksem kui $0 + 1 + \ldots + 7 = 28$, ent $3 \cdot 28 = 84 > 80$ — saime vastuolu.

14. **Märkus:** Originaallahenduses väideti, et piisab 7 tipu eemaldamisest, kuid selle kohta esitatud näide osutus ebakorrektseks. Allpool näitame, et 6 tipu eemaldamisest ei piisa ning et 8 tipu eemaldamine osutub piisavaks. Näib, et 7 tipu eemaldamisest ei piisa, kuid praeguseks pole selle väite tõestamiseks teada ühtki teist viisi peale üksikjuhtude läbivaatamise.

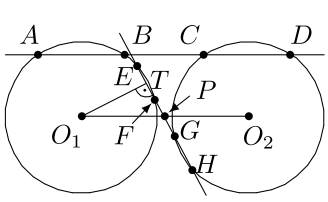
Joniselt 3a on näha, et kõikide ruutude "kaotamiseks" piisab 8 tipu eemaldamisest. Oletame nüüd, et meil on õnnestunud seda saavutada, eemaldades vaid 6 tippu. Tähistame ruudustiku read ja veerud vastavalt sümbolitega A, B, …, E ning 1, 2, …, 5. Ilmselt peab üks eemaldatavatest tippudest olema suure ruudu tipuks — olgu selleks tipp $A1$. Et "kaotada" kõik joonistel 3b–e näidatud ruudud, peame tingimata eemaldama tipud $B2$, $C3$, $D4$, $D2$ ja $B4$. Seni oleme eemaldanud 6 tippu, ilma et meil oleks olnud mingit valikuvõimalust, kuid joonisel 3f näidatud ruut on ikkagi alles.



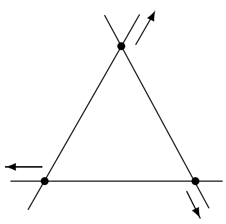
Joonis 3

15. Ühe täringu tahkudele võime kirjutada arvud 1, 2, 3, 4, 5, 6 ja teise täringu tahkudele arvud 1, 1, 1, 7, 7, 7. Sel juhul esineb igaüks 12 võimalikust summast täpselt kolmel korral.

16. Kõigepealt paneme tähele, et ringjoonte keskpunktid O_1 ja O_2 asuvad teine teisel pool sirget EH, vastasel korral oleks $r < 12$ ja $|AB| \neq 14$. Olgu P sirgete EH ja O_1O_2 lõikepunkt (vt. joonist 4). Punktid A ja D asuvad ühel pool sirget O_1O_2 (vastasel korral lõikuksid sirged AD, EH ja O_1O_2 punktis P ning kehtiksid võrdused $|AB| = |BC| = |CD|$ ja $|EF| = |FG| = |GH|$, millest järelduks $|BC| = |FG|$). On lihtne näha, et $|O_1O_2| = 2 \cdot |O_1P| = |AC| = 28\,\text{cm}$. Olgu $h = |O_1T|$ kolmnurga O_1EP kõrgus. Siis kolmnurgast O_1TP saame $h^2 = 14^2 - 6^2 = 160$ ja kolmnurgast O_1TF saame $r^2 = h^2 + 3^2 = 169$. Seega $r = 13\,\text{cm}$.



Joonis 4

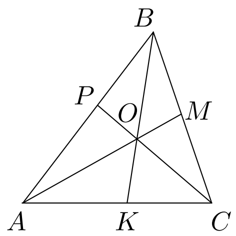


Joonis 5

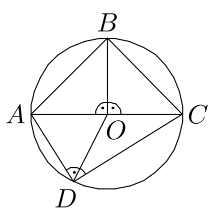
17. Jah, on võimalik. Kõigepealt asetame “nullhetkel” kolm punkti võrdkülgse kolmnurga tippudesse ja laseme neil liikuda võrdsete kiirustega piki kolmnurga külgedega määratud sirgeid nagu on näidatud joonisel 5. Sel juhul asetsevad need kolm punkti mistahes ajamomendil nii minevikus kui ka tulevikus mingi võrdkülgse kolmnurga tippudes ning seetõttu ei saa olla ühel sirgel. Et muuta ka punktide kiirused erinevateks, valime suvalise konstantse nullvektorist erineva vektori, mille projektsioonid kolmnurga külgedele on kõik erineva pikkusega, ning liidame selle vektori kõikidele kiirusvektoritele. See on samaväärne kogu eespool saadud konstruktsiooni konstantse kiirusega “liikuma” panemisega, mistõttu punktide mittekollineaarsus säilib (tegelikult on need punktid endiselt igal ajahetkel mingi võrdkülgse kolmnurga tippudes).

18. Lõikugu sirged OC ja AB punktis P. Et AM on mediaan, siis $\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{|AK|}{|KC|}$ (see võrdus kehtib ilmselt juhul $|AB| = |AC|$ ning säilib tasandi ühtlasel kokkusurumisel piki sirget BK). Kasutades siinusteoreemi kolmnurkade ABK ja BCK jaoks, saame $\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{|AK|}{|KC|} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{5}{4}$ (vt. joonis 6). Et $|AP| + |PB| = |AB| = 15$, siis $|AP| = \frac{25}{3}$ ja $|PB| = \frac{20}{3}$. Seega $|AC|^2 - |BC|^2 = 25 = |AP|^2 - |BP|^2$ ja $|AC|^2 - |AP|^2 = |BC|^2 - |BP|^2$. Kasutades nüüd koosinusteoreemi kolmnurkade APC ja BPC jaoks, saame $\cos\angle APC = \cos\angle BPC$, s.t. $P = L$. Nagu eespool, saame ka nüüd tasandi kokkusurumise abil näidata, et $KP \parallel BC$ ning seetõttu $\angle OPK = \angle OCB$. Et $|BM| = |MC|$ ja $\angle BPC = 90^\circ$, siis $\angle OCB = \angle OPM$. Ühendades need võrdused, saame $\angle OLK = \angle OPK = \angle OCB = \angle OPM = \angle OLM$.

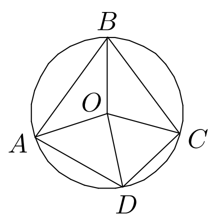
19. Et $ABCD$ on kõõlnelinurk, siis $\angle ABC + \angle CDA = \angle BCD + \angle DAB = 180^\circ$. Piisab näidata, et kõik need nurgad on suurusega 90°, siis ka nurgad $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$ ja $\angle DOA$ on kõik suurusega 90° ja $ABCD$ on ruut. Vaatleme kaht võimalikku juhtu:



Joonis 6



Joonis 7



Joonis 8

a) Vähemalt üks nelinurga $ABCD$ diagonaalidest on selle ümberringjoone diameetriks — olgu $\angle AOB + \angle BOC = 180°$. Siis $\angle ABC = \angle CDA = 90°$ ja vähemalt kaks nurkadest $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$ ja $\angle DOA$ peavad olema suurusega $90°$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $\angle AOB = \angle BOC = 90°$. Nüüd $\angle COD = \angle DAB$ ja $\angle DOA = \angle BCD$ (vt. joonist 7). Arvestades, et $\frac{1}{2}\angle DOA = \angle DCA = \angle BCD - 45°$, saame $\angle BCD = \angle DAB = 90°$.

b) Mitte kumbki nelinurga $ABCD$ diagonaalidest ei ole selle ümberringjoone diameetriks. Siis $\angle AOB + \angle COD = \angle BOC + \angle DOA = 180°$ ja ükski nelinurga $ABCD$ nurkadest ei ole täisnurk. Järelikult pole ükski nurkadest $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$ ja $\angle DOA$ täisnurk. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $\angle AOB > 90°$ ja $\angle BOC > 90°$ (vt. joonist 8). Siis $\angle ABC < 90°$ ja seega $\angle ABC = \angle COD$ või $\angle ABC = \angle DOA$. Et $\angle COD + \angle DOA = \angle AOC = 2\angle ABC$, siis $\angle COD = \angle DOA$ ja $\angle AOB + \angle DOA = 180°$, mis on vastuolus tehtud eeldusega.

20. On selge, et sfääris asuv korrapärane tetraeeder on maksimaalse ruumalaga parajasti siis, kui selle kõik tipud asuvad sfääri pinnal. Seega peavad maksimaalse ruumalaga "ilusa" tetraeedri kõik neli tippu asuma kuubi tippudes (tõestuseks vaatleme sfääri, millel asuvad kuubi kõik tipud). Selliseid tetraeedreid on täpselt kaks, kusjuures nende ruumala on $1 - 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. Teiselt poolt saame konstrueerida kuitahes väikese "ilusa" tetraeedri, rakendades maksimaalse ruumaga "ilusale" tetraeedrile homoteetiateisendust keskpunktiga ühes selle tippudest.