Matemaatikaolümpiaad “Balti tee ’92”

Vilniuses, 7. novembril 1992

1. Olgu p ja q kaks järjestikust paaritut algarvu. Tõesta, et arv $p+q$ on esitatav vähemalt kolme ühest suurema naturaalarvu korrutisena (need arvud ei tarvitse olla kõik erinevad).

2. Tähistagu $d(n)$ naturaalarvu n kõigi positiivsete jagajate arvu (1 ja n kaasa arvatud). Tõesta, et leidub lõpmata palju naturaalarve n, mille korral $\dfrac{n}{d(n)}$ on täisarv.

3. Leia lõpmatu mittekonstantne aritmeetiline jada, mille iga liige on naturaalarv, mis ei ole esitatav kahe naturaalarvu ruutude summana ega kahe naturaalarvu kuupide summana.

4. Kas leidub kuusnurk, mille kõik tipud on täisarvuliste koordinaatidega ja mille servade pikkuste ruudud on kuus järjestikust positiivset täisarvu?

5. On teada, et $a^2+b^2+(a+b)^2=c^2+d^2+(c+d)^2$. Tõesta, et kehtib võrdus $a^4+b^4+(a+b)^4=c^4+d^4+(c+d)^4$.

6. Tõesta, et 99 arvu $\dfrac{k^3-1}{k^3+1}$, $k=2,3,\dots,100$ korrutis on suurem kui $\dfrac{2}{3}$.

7. Olgu $a=\sqrt[1992]{1992}$. Kumb arv on suurem, kas

   $$\left.a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}\right\}1992$$

   või 1992?

8. Leia võrrandi $2^x\cdot(4-x)=2x+4$ kõik täisarvulised lahendid.

9. Olgu $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, kus $b<0$ ja $ab=9c$. Tõesta, et polünoomil $f(x)$ on kolm erinevat reaalarvulist nullkohta.

10. Leia kõik neljanda astme polünoomid $p(x)$, mis rahuldavad järgmisi tingimusi:
    (i) $p(x)=p(-x)$ iga x korral;
    (ii) $p(x)\geqslant 0$ iga x korral;
    (iii) $p(0)=1$;
    (iv) polünoomil $p(x)$ on täpselt kaks sellist lokaalset miinimumkohta x_1 ja x_2, et $|x_1-x_2|=2$.

11. Tähistagu $\mathbb{Q}^+$ kõigi positiivsete ratsionaalarvude hulka. Tõesta, et leidub üks ja ainult üks funktsioon $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^+$, mis rahuldab järgmisi tingimusi:
    (i) kui $0<q<\dfrac{1}{2}$, siis $f(q)=1+f\left(\dfrac{q}{1-2q}\right)$;

(ii) kui $1 < q \leqslant 2$, siis $f(q) = 1 + f(q-1)$;

(iii) $f(q) \cdot f\left(\frac{1}{q}\right) = 1$ iga $q \in \mathbb{Q}^+$ korral.

12. Tähistagu $\mathbb{N}$ kõigi naturaalarvude hulka. Olgu $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *bijektiivne* funktsioon (s.t. iga naturaalarvu n korral leidub üks ja ainult üks selline naturaalarv k, et $\varphi(k) = n$), mille korral eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{n} = L\,.$$

Millised on L võimalikud väärtused?

13. Tõesta, et mistahes positiivsete arvude $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ja $y_1, y_2, \ldots, y_n$ korral kehtib võrratus

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i y_i} \geqslant \frac{4n^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2}\,.$$

14. Riigis on lõplik arv linnu, mida omavahel ühendavad ühesuunalise liiklusega teed. On teada, et mistahes kahe linna korral on ühest neist linnadest võimalik sõita teise. Tõesta, et leidub linn, millest on võimalik sõita mistahes teise linna.

15. Noa laeval on 4 puuri, millesse tuleb paigutada 8 liiki loomi. Noa kavatseb panna igasse puuri mõne loomaliigi. On teada, et iga loomaliigi korral leidub ülimalt kolm sellist liiki, millega antud liigi loomi kokku panna ei saa. Tõesta, et Noa saab jagada loomaliigid puuride vahel nii, et iga liigi loomad on ühes puuris neile sobivate naabritega.

16. Kumera hulktahuka kõik tahud on rööpkülikud. Kas sellel hulktahukal võib olla täpselt 1992 tahku?

17. Nelinurgal $ABCD$ on ümberringjoon raadiusega 1. Seejuures on nelinurga diagonaal AC selle ümberringjoone diameetriks ja teise diagonaali BD pikkus on võrdne külje AB pikkusega. Diagonaalid lõikuvad punktis P ning lõigu PC pikkus on $\frac{2}{5}$. Leia külje CD pikkus.

18. Tõesta, et mitte-nürinurkse kolmnurga ümbermõõt on alati suurem selle kolmnurga ümberringjoone kahekordsest diameetrist.

19. Olgu C tasandil võetud ringjoon ning C_1 ja C_2 mittelõikuvad ringjooned, mis puutuvad ringjoont C seestpoolt vastavalt punktides A ja B. Olgu t ringjoonte C_1 ja C_2 ühine puutuja, mille suhtes ringjooned C_1 ja C_2 asuvad ühel pool ning olgu D ja E selle puutepunktid vastavalt ringjoontega C_1 ja C_2. Olgu F sirgete AD ja BE lõikepunkt. Tõesta, et punkt F asub ringjoonel C.

20. Olgu $a \leqslant b \leqslant c$ täisnurkse kolmnurga küljepikkused ning olgu $2p$ ja S vastavalt selle kolmnurga ümbermõõt ja pindala. Tõesta, et $p(p-c) = (p-a)(p-b) = S$.

Ülesannete lahendused

1. Kuna $q-p=2k$ on paarisarv, saame $p+q=2(p+k)$. On selge, et $p<p+k<p+2k=q$. Seetõttu $p+k$ ei ole algarv ja on järelikult kahe ühest suurema naturaalarvu korrutis.

2. Uuri arve kujul p^{p^n-1}, kus p on algarv ja $n=1,2,\ldots$.

3. Iga naturaalarvu n korral kehtib kas $n^2\equiv 0$ või $n^2\equiv 1 \pmod 4$ ning kas $n^3\equiv 0$ või $n^3\equiv \pm 1 \pmod 9$. Seetõttu on nõutud omadusega näiteks jada $\{\,36n+3 \mid n=1,2,\ldots\}$.

4. Sellist kuusnurka ei ole olemas. Iga kuue järjestikuse naturaalarvu summa on paaritu. Teisest küljest, kuusnurga külgede pikkuste ruutude summa on võrdne nende koordinaattelgedel võetud projektsioonide ruutude summaga. Pojektsioonide ruutude summal on aga sama paarsus kui projektsioonide eneste summal, mis on ilmselt paarisarv.

5. Kasuta samasust $\big(a^2+b^2+(a+b)^2\big)^2=2\big(a^4+b^4+(a+b)^4\big)$.

6. Paneme tähele, et

$$\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}=\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)\big((k-1)^2+(k-1)+1\big)}\,.$$

Pärast taandamisi saame

$$\prod_{k=2}^{100}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{1\cdot 2\cdot(100^2+100+1)}{100\cdot 101\cdot(1^2+1+1)}>\frac{2}{3}\,.$$

7. Esimene neist arvudest on väiksem kui

$$\left.a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{1992}}}}}}\right\}1992=\left.a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{1992}}}}}}\right\}1991=\ldots=1992\,.$$

8. Kuna 2^x peab olema positiivne, saame $\dfrac{2x+4}{4-x}>0$, millest $-2<x<4$. Seega piisab otsida lahendit arvude -1, 0, 1, 2, 3 hulgast. Lahenditeks on $x=0$, 1, 2.

9. Kuna $b<0$, siis on tuletisel $f'(x)=3x^2+2ax+b$ kaks reaalarvulist nullkohta x_1 ja x_2. Kuna $f(x)\to\pm\infty$, kui $x\to\pm\infty$, siis piisab kontrollida, et $f(x_1)$ ja $f(x_2)$ on erimärgilised, s.t. $f(x_1)f(x_2)<0$. Jagades polünoomi $f(x)$ polünoomiga $f'(x)$ ja kasutades võrdust $ab=9c$ leiame, et jäägiks on $x\Big(\dfrac{2}{3}b-\dfrac{2}{9}a^2\Big)$. Kuna $x_1x_2=\dfrac{b}{3}<0$, saame $f(x_1)f(x_2)=x_1x_2\Big(\dfrac{2}{3}b-\dfrac{2}{9}a^2\Big)^2<0$.

10. Olgu $p(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, kus $a\neq 0$. Tingimustest (i)–(iii) saame $b=d=0$, $a>0$ ja $e=1$. Tingimusest (iv) järeldub, et tuletisel $p'(x)=4ax^3+2cx$ on vähemalt kaks erinevat reaalarvulist nullkohta. Kuna $a>0$, siis $c<0$ ja tuletisel $p'(x)$ on kolm nullkohta $x=0$, $x=\pm\sqrt{\dfrac{-c}{2a}}$. Tingimuses (iv) mainitud miinimumpunktid peavad

olema $x = \pm\sqrt{\dfrac{-c}{2a}}$, seega $2\sqrt{\dfrac{-c}{2a}} = 2$ ja $c = -2a$. Lõpuks saame tingimusest (ii), et $p(x) = a(x^2-1)^2 + 1 - a \geqslant 0$ iga x korral, millest järeldub $0 < a \leqslant 1$. Lihtne on kontrollida, et iga selline polünoom rahuldab tingimusi (i)−(iv).

11. Tingimusest (iii) saame $f(1) = 1$. Rakendades tingimust (iii) tingimustele (i) ja (ii) saame kaks uut tingimust (i′) ja (ii′), mis kehtivad vastavalt juhtudel $q > 2$ ja $\dfrac{1}{2} \leqslant q < 1$. Nüüd võime iga ratsionaalarvu $\dfrac{a}{b} \neq 1$ korral kasutada ühte tingimustest (i), (i′), (ii) ja (ii′), et avaldada $f\left(\dfrac{a}{b}\right)$ mingi sellise arvu $f\left(\dfrac{a'}{b'}\right)$ kaudu, kus $a' + b' < a + b$. See protsess viib lõpliku arvu sammude järel arvuni 1 ning siis võime kasutada võrdust $f(1) = 1$. Seega oleme kindlaks teinud, et selline funktsioon on olemas ja üheselt määratud.

Märkus. Ülesande esialgses variandis oli nõutud määrata ka funktsiooni f kõik püsipunktid, s.t. leida võrrandi $f(q) = q$ kõik lahendid, ent võistluse žürii otsustas ülesannet lihtsustada. Toome siinkohal ära täieliku ülesande lahenduse. Kõigepealt paneme tähele, et kui q on püsipunkt, siis on seda ka $\dfrac{1}{q}$. Kui $0 < q < \dfrac{1}{2}$ on püsipunkt, siis tingimuse (i) kohaselt $f\left(\dfrac{q}{1-2q}\right) = q - 1 < 0$, mis on võimatu, seega ei ole olemas püsipunkte $0 < q < \dfrac{1}{2}$ ega $q > 2$. Püsipunkti $1 \leqslant \dfrac{a}{b} \leqslant 2$ korral võime tingimusest (ii) kergesti järeldada, et ka $\dfrac{a}{b} - 1 = \dfrac{a-b}{b}$ ja $\dfrac{b}{a-b}$ on püsipunktid. Lihtne on näha, et $1 \leqslant \dfrac{b}{a-b} \leqslant 2$ (sest $\dfrac{b}{a-b}$ on püsipunkt). Kuna selle uue püsipunkti lugeja ja nimetaja summa on rangelt väiksem kui $a+b$, siis jõuame seda protsessi jätkates lõpliku arvu sammude pärast püsipunktini 1. Sama protsessi vastupidises suunas läbi viies leiame, et iga püsipunkti $q > 1$ on võimalik konstrueerida lähtudes püsipunktist $q_0 = 1$ ja kasutades korduvalt asjaolu, et kui $\dfrac{a}{b} > 1$ on püsipunkt, siis on seda ka $\dfrac{a+b}{a}$. Nüüd on lihtne näha, et kõik sellised püsipunktid avalduvad kujul $\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$, kus $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ on Fibonacci arvude jada.

12. Näitame, et ainus võimalik väärtus on $L = 1$. Kui oletada, et $L > 1$, siis leidub selline arv N, et iga $n \geqslant N$ korral $\dfrac{\varphi(n)}{n} > 1$ ja seega $\varphi(n) \geqslant n + 1 \geqslant N + 1$. Sellisel juhul ei saa aga φ olla bijektiivne, kuna hulka $\{1, 2, \ldots, N-1\}$ ei saa bijektiivselt kujutada hulgaks $\{1, 2, \ldots, N\}$.
Oletame nüüd, et $L < 1$. Kuna φ on bijektiivne, siis ilmselt $\varphi(n) \to \infty$ kui $n \to \infty$. Seepärast

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi^{-1}(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi^{-1}(\varphi(n))}{\varphi(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\varphi(n)} = \frac{1}{L} > 1\,,$$

s.t. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\varphi^{-1}(n)}{n} > 1$, mis on vastuolus eespool tõestatuga, sest ka pöördfunktsioon φ^{-1} on bijektiivne.

13. Kuna $(x_i + y_i)^2 \geqslant 4x_iy_i$, siis piisab tõestada, et

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_iy_i}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\Big) \geqslant n^2 .$$

Seda on lihtne teha induktsiooniga, arvestades et $a + \dfrac{1}{a} \geqslant 2$ iga $a > 0$ korral.

14. Olgu linn A selline, millest on võimalik jõuda maksimaalsesse arvu linnadesse. Oletame, et linnast A pole võimalik jõuda linna B. Sellisel juhul on linnast B võimalik jõuda linna A ja seetõttu on linnast B võimalik jõuda rohkematesse linnadesse kui linnast A — vastuolu.

15. Paigutame loomaliigid üksteise järel puuridesse. Kuna iga liik ei sobi kõige enam kolme teise liigiga, on alati võimalik see liik paigutada ühte neljast puurist.

Märkus. Algselt oli ülesanne püstitatud järgmiselt: "…Noa kavatseb panna igasse puuri *kaks* liiki …". Trükivea tõttu läks sõna "kaks" kaduma ja ülesanne muutus triviaalseks. Toome järgnevalt ära esialgse ülesande lahenduse. Jaotame kõigepealt liigid puuride vahel ülalkirjeldatud viisil. Kui mõnes puuris A on seejuures rohkem kui kolm erinevat liiki, siis leidub kindlasti puur B, kus on ülimalt üks liik, ning see liik sobib vähemalt ühe liigiga puurist A, mille me võime üle viia puuri B. Seega võime eeldada, et igas puuris on ülimalt kolm liiki. Kui mingis kahes puuris on kummaski kolm liiki, siis on ilmselt võimalik viia üks neist kuuest liigist ühte kahest ülejäänud puurist. Jääb üle vaadelda juhtu, kui neljas puuris on vastavalt 1, 2, 2 ja 3 liiki. Kui liik esimeses puuris sobib mõne liigiga neljandast puurist, siis viime selle liigi esimesse puuri ja ülesanne on lahendatud. Vastasel korral leidub mistahes neljandas puuris oleva liigi X jaoks teises või kolmandas puuris liik, millega liik X sobib. Viime selles puuris oleva teise liigi üle esimesse puuri ning seejärel liigi X sellesse (s.t. teise või kolmandasse) puuri.

16. *Vastus:* ei või.

Nimetame tahkude jada $F_1, F_2, \ldots, F_k$ *ringiks*, kui kõigil paaridel (F_1, F_2), (F_2, F_3), …, (F_{k-1}, F_k), (F_k, F_1) on ühine serv ja kõik need ühised servad on paralleelsed. Pole raske näha, et igal kahel ringil on parajasti kaks ühist tahku ja, vastupidi, iga tahk kuulub parajasti kahele ringile. Järelikult, kui ringide arv on n, siis tahkude koguarv peab olema $2C_n^2 = n(n-1)$. Samas ei ole olemas sellist naturaalarvu n, et $n(n-1) = 1992$.

17. Olgu $\angle ACD = 2\alpha$ (vt. joonist 1). Siis $\angle CAD = \dfrac{\pi}{2} - 2\alpha$, $\angle ABD = 2\alpha$, $\angle ADB = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ ja $\angle CDB = \alpha$. Rakendades siinusteoreemi kolmnurkadele DCP ja DAP, saame $\dfrac{|DP|}{\sin 2\alpha} = \dfrac{2}{5\sin\alpha}$ ja $\dfrac{|DP|}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)} = \dfrac{8}{5\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$. Nendest võrdustest saame

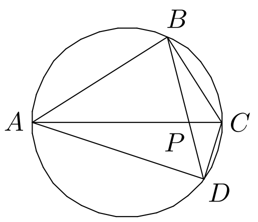
$\dfrac{2\sin 2\alpha}{5\sin\alpha} = \dfrac{8\cos 2\alpha}{5\cos\alpha}$, kust $4\sin\alpha\cos^2\alpha = 8\cos 2\alpha\sin\alpha$ ja $\cos 2\alpha + 1 = 4\cos 2\alpha$. Seega $\cos 2\alpha = \dfrac{1}{3}$ ja $|CD| = 2\cos 2\alpha = \dfrac{2}{3}$.

18. Olgu K, L, M vastavalt mittenürinurkse kolmnurga külgede AB, BC, AC keskpunktid (vt. joonist 2). Paneme tähele, et selle kolmnurga ümberringjoone keskpunkt O asub kolmnurga KLM sees (või ühes selle tippudest, kui ABC on täisnurkne kolmnurk). Seetõttu $|AK| + |KL| + |LC| > |AO| + |OC|$ ja

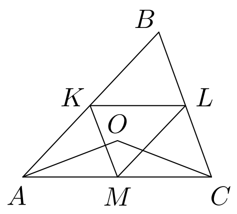
$$|AB| + |AC| + |BC| > 2 \cdot (|AO| + |OC|) = 2d\,,$$

kus d on kolmnurga ABC ümberringjoone diameeter.

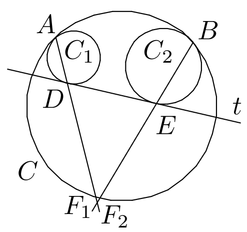
19. Olgu F_1 sirge AD ja ringjoone C teine lõikepunkt (vt. joonist 3). Vaatleme homoteetsusteisendust keskpunktiga A, mis kujutab punkti D punktiks F_1. See teisendus kujutab ringjoone C_1 ringjooneks C ja ringjoone C_1 puutuja t ringjoone C puutujaks punktis F_1. Teeme sedasama ringjoonega C_2 ja sirgega BE: olgu F_2 sirge BE teine lõikepunkt ringjoonega C ning vaatleme homoteetiat keskpunktiga B, mis kujutab punkti E punktiks F_2, ringjoone C_2 ringjooneks C ning sirge t ringjoone C puutujaks punktis F_2. Kuna ringjoone C puutujad punktides F_1 ja F_2 on mõlemad paralleelsed sirgega t, siis peavad need puutujad kokku langema, s.t. $F_1 = F_2$.



Joonis 1



Joonis 2



Joonis 3

20. Vahetu arvutamine annab:

$$p(p-c) = \frac{1}{4}\big((a+b)^2 - c^2\big) = \frac{ab}{2} = S\,,$$

$$(p-a)(p-b) = \frac{1}{4}\big(c^2 - (a^2 - b^2)\big) = \frac{ab}{2} = S\,.$$