Matemaatikaolümpiaad “Balti tee ’91”

Tartus, 14. novembril 1991

1. Leia vähim selline positiivne täisarv n, et mistahes n erineva täisarvu $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ kõikvõimalike vahede $a_i - a_j$ $(i < j)$ korrutis jaguks arvuga 1991.

2. Tõesta, et ei leidu niisuguseid positiivseid täisarve n ja $m > 1$, mille korral $102^{1991} + 103^{1991} = n^m$.

3. Müügil on 20 põrsast hindadega 12 kuni 15 rubla ning 20 kotti hindadega 10 kopikat kuni 1 rubla, kusjuures kõik hinnad on erinevad. Tõesta, et Jaan ja Peeter võivad kumbki osta täpselt sama summa eest põrsa kotis.

4. Olgu p selline täisarvuliste kordajatega polünoom, et $p(-n) < p(n) < n$ mingi täisarvu n korral. Tõesta, et $p(-n) < -n$.

5. Tõesta võrratused
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \geqslant \frac{9}{a+b+c},$$
kus $a, b, c > 0$.

6. Tähistagu $[x]$ suurimat täisarvu, mis ei ületa arvu x, ning olgu $\{x\} = x - [x]$. Lahenda võrrand
$$[x] \cdot \{x\} = 1991\, x .$$

7. Olgu A, B, C mingi teravnurkse kolmnurga sisenurgad. Tõesta võrratus
$$\sin A + \sin B > \cos A + \cos B + \cos C .$$

8. Olgu a, b, c, d, e paarikaupa erinevad reaalarvud. Tõesta, et võrrandil
$$\begin{aligned}&(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) + \\ &\qquad + (x-a)(x-b)(x-c)(x-e) + \\ &\qquad + (x-a)(x-b)(x-d)(x-e) + \\ &\qquad + (x-a)(x-c)(x-d)(x-e) + \\ &\qquad + (x-b)(x-c)(x-d)(x-e) = 0\end{aligned}$$
on 4 erinevat reaalarvulist lahendit.

9. Leia võrrandi $a\, e^x = x^3$ lahendite arv.

10. Avalda $\sin 3^\circ$ väärtus radikaalides (s.t. aritmeetiliste tehete ja juurte abil).

11. Kõik positiivsed täisarvud 1-st 1 000 000-ni jaotatakse kahte rühma vastavalt sellele, kas nende ristsumma on paaris või paaritu. Kummas rühmas on rohkem arve?

12. Kumera 1991-nurga tipud on nummerdatud täisarvudega 1 kuni 1991 ning selle iga külg ja diagonaal on värvitud kas punaseks või siniseks. Tõesta, et 1991-nurga tippude mistahes ümbernummerdamise korral leiduvad täisarvud k ja l nii, et pärast ümbernummerdamist on nende numbritega tippude vaheline lõik sama värvi kui samade numbritega tippude vaheline lõik enne ümbernummerdamist.

13. Võrdkülgne kolmnurk jaotatakse 25 kongruentseks kolmnurgaks, mis nummerdatakse naturaalarvudega 1 kuni 25. Tõesta, et leiduvad kaks ühise küljega kolmnurka, mille numbrite vahe on suurem kui 3.

14. Lossis on teatud arv saale ja n ust. Iga uks ühendab mingit kaht saali või viib lossist välja. Igal saalil on vähemalt 2 ust. Rüütel siseneb lossi ja edaspidi võib ta igast saalist väljuda mistahes ukse kaudu peale selle, mille kaudu ta viimati sellesse saali sisenes. Leia strateegia, mille abil rüütel jõuab lossist välja, olles läbinud mitte rohkem kui $2n$ saali. (Saali läbimine läheb arvesse iga kord, kui rüütel sellesse siseneb.)

15. Malelaua ruutudesse on kirjutatud naturaalarvud ja lauale asetatud kuningas. Kuninga igal käigul liidetakse 1 sellel ruudul asuvale arvule, kuhu kuningas astus. Kas kuningal on alati võimalik käia nii, et muuta kõik malelaual olevad arvud

    a) paarisarvudeks;
    b) 3-ga jaguvateks;
    c) võrdseteks?

16. Puutugu kaks ringjoont C_1 ja C_2 (raadiustega r_1 ja r_2) teineteist väliselt ja olgu sirge l nende ühine puutuja. Kolmas ringjoon C_3 (raadiusega $r_3 < \min(r_1, r_2)$) puutub väliselt kahte esimest ringjoont ja puutub ka sirget l. Tõesta, et

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} .$$

17. Olgu koordinaattasanditel omadus valgust peegeldada. Valguskiir langeb ühele nendest tasanditest. Kuidas on kiire suund pärast peegeldumist kõigilt kolmelt koordinaattasandilt seotud selle esialgse suunaga?

18. Kas on võimalik paigutada kaks tetraeedrit ruumalaga $\frac{1}{2}$ kerasse raadiusega 1 nii, et nad teineteist ei lõikaks?

19. Suurendame veidi kolme üksteist väliselt puutuva ringjoone raadiusi, nii et tekib 3 paari ringjoonte lõikepunkte. Olgu A_1, B_1, C_1 "välimised" lõikepunktid ja A_2, B_2, C_2 neile vastavad "sisemised" lõikepunktid. Tõesta, et

$$|A_1B_2| \cdot |B_1C_2| \cdot |C_1A_2| = |A_1C_2| \cdot |C_1B_2| \cdot |B_1A_2| .$$

20. Olgu $A(x_1, y_1)$ ja $B(x_2, y_2)$ kaks punkti funktsiooni $y = \frac{1}{x}$ graafikul, kusjuures $0 < x_1 < x_2$ ja $|AB| = 2 \cdot |OA|$ (O on koordinaatide alguspunkt, s.t. $O(0,0)$). Olgu C lõigu AB keskpunkt. Tõesta, et nurk x-telje ja kiire OA vahel on kolm korda suurem kui nurk x-telje ja kiire OC vahel.

Ülesannete lahendused

1. *Vastus*: vähim selline arv on $n = 182$.

   Olgu $S = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_i - a_j)$. Kuna $1991 = 11 \cdot 181$, jagub korrutis S arvuga 1991 siis ja ainult siis, kui ta jagub arvudega 11 ja 181. Kui $n \leqslant 181$, siis võime võtta arvud $a_1, \ldots, a_n$ nii, et nad kõik annavad arvuga 181 jagades erinevad jäägid, järelikult ei jagu ükski tegur $a_i - a_j$ ega ka korrutis S algarvuga 181. Kui aga $n \geqslant 182$, siis vastavalt Dirichlet' printsiibile leiduvad arvud a_i ja a_j mille vahe $a_i - a_j$ jagub arvuga 181 (ja muidugi leiduvad ka a_k ja a_l, nii et $a_k - a_l$ jagub arvuga 11).

2. Teguriteks lahutades saame:

$$102^{1991} + 103^{1991} = (102 + 103)(102^{1990} - 102^{1989} \cdot 103 + \\ + 102^{1988} \cdot 103^2 + \ldots + 103^{1990}),$$

   kus $102 + 103 = 205 = 5 \cdot 41$. Piisab näidata, et teine sulgavaldis ei jagu arvuga 5. Olgu $a_k = 102^k \cdot 103^{1990-k}$, siis $a_k \equiv 4 \pmod 5$, kui k on paarisarv, ja $a_k \equiv -4 \pmod 5$, kui k on paaritu. Järelikult on terve teine tegur kongruentne arvuga $4 \cdot 1991 \equiv 4 \pmod 5$.

3. Erinevaid võimalusi põrsa ja koti ostmiseks on $20 \cdot 20 = 400$, erinevaid hinnavõimalusi aga $1600 - 1210 + 1 = 391$. Vastavalt Dirichlet' printsiibile peavad leiduma kaks ühe ja sama hinnaga kombinatsiooni põrsast ja kotist. Seejuures peavad need kaks põrsast (ja samuti need kaks kotti) olema erinevad, sest vastasel juhul oleks kahel kotil (vastavalt kahel põrsal) sama hind.

4. Kuna $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$, siis jagub mistahes täisarvuliste kordajatega polünoomi $p(x)$ ning täisarvude a ja b korral arv $p(a) - p(b)$ arvuga $(a-b)$. Järelikult arv $p(n) - p(-n) \neq 0$ jagub arvuga $2n$ ning seega $p(-n) \leqslant p(n) - 2n < n - 2n = -n$.

5. Tõestamaks esimest võrratust, paneme tähele, et $\dfrac{2}{a+b} \leqslant \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\Big)$ ning samuti $\dfrac{2}{b+c} \leqslant \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\Big)$ ja $\dfrac{2}{c+a} \leqslant \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{a}\Big)$. Tõestuse teise osa jaoks kasutame võrratust $\dfrac{3}{x+y+z} \leqslant \dfrac{1}{3}\Big(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\Big)$, kus $x = a + b$, $y = b + c$ ja $z = c + a$.

6. *Vastus*: $x = 0$ või $x = -\dfrac{1}{1992}$.

   Tähistame $f(x) = [x] \cdot \{x\}$, siis on meil vaja lahendada võrrand $f(x) = 1991x$. Ilmselt on üheks lahendiks $x = 0$. Mistahes $x > 0$ korral kehtivad võrratused $0 \leqslant [x] \leqslant x$ ja $0 \leqslant \{x\} < 1$, millest saame $f(x) < x < 1991x$. Kui $x \leqslant -1$, siis $0 > [x] > x - 1$ ja $0 \leqslant \{x\} < 1$, kust $f(x) > x - 1 > 1991x$. Lõpuks, kui $-1 < x < 0$, siis $[x] = -1$ ja

$\{x\} = x - [x] = x + 1$ ning $f(x) = -x - 1$. Võrrandi $-x - 1 = 1991x$ ainus lahend on $x = -\dfrac{1}{1992}$.

7. Teravnurkse kolmnurga korral $A + B > \dfrac{\pi}{2}$ ning järelikult $\sin A > \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - B\right) = \cos B$ ja $\sin B > \cos A$. Kasutades neid võrratusi, saame

$$(1 - \sin A)(1 - \sin B) < (1 - \cos A)(1 - \cos B)$$

ja

$$\begin{aligned}\sin A + \sin B &> \cos A + \cos B - \cos A \cos B + \sin A \sin B = \\ &= \cos A + \cos B - \cos(A + B) = \\ &= \cos A + \cos B + \cos C \ .\end{aligned}$$

8. Paneme tähele, et antud võrrandi vasakul pool on tuletis polünoomist

$$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)(x - e) \ ,$$

millel on 5 erinevat reaalarvulist nullkohta.

9. *Vastus*: antud võrrandil on üks lahend, kui $a \leqslant 0$ või $a = \dfrac{27}{e^3}$; kaks lahendit, kui $0 < a < \dfrac{27}{e^3}$; lahendid puuduvad, kui $a > \dfrac{27}{e^3}$.

Uurides funktsioonide ae^x ja x^3 graafikuid näeme, et antud võrrandil on $a \leqslant 0$ korral alati üks lahend ja $a > 0$ korral 0, 1 või 2 lahendit. Peale selle võib $a > 0$ korral võrrandi lahendite arv a suurenedes ainult väheneda ning võrrandil on üks lahend parajasti ühel a positiivsel väärtusel, nimelt juhul, kui ae^x ja x^3 graafikud puutuvad teineteist, s.t. leidub selline arv x_0, et $ae^{x_0} = x_0^3$ ja $ae^{x_0} = 3x_0^2$. Nendest kahest võrrandist saame $x_0 = 3$ ja $a = \dfrac{27}{e^3}$.

10. *Vastus*: $\sin 3^\circ = \dfrac{1}{16}\left((\sqrt{5} - 1)(\sqrt{6} + \sqrt{2}) - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}(\sqrt{6} - \sqrt{2})\right)$.

Kasutame võrdust

$$\sin 3^\circ = \sin(18^\circ - 15^\circ) = \sin 18^\circ \cos 15^\circ - \cos 18^\circ \sin 15^\circ \ ,$$

kus

$$\sin 15^\circ = \sin\left(\frac{30^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

ning

$$\cos 15^\circ = \sqrt{1-\sin^2 15^\circ} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\ .$$

Et leida $\cos 18^\circ$ ja $\sin 18^\circ$ väärtusi, paneme tähele, et $\cos(3\cdot 18^\circ) = \sin(2\cdot 18^\circ)$. Võttes $x = 18^\circ$ võrdustes

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x = \cos x(1-4\sin^2 x)$$

ja

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x\ ,$$

saame $1-4\sin^2 18^\circ = 2\sin 18^\circ$. Lahendades selle ruutvõrrandi ning jättes kõrvale negatiivse lahendi, leiame $\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ ja $\cos 18^\circ = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

11. *Vastus*: arvude 1 kuni $1\,000\,000$ hulgas on rohkem paarituarvulise ristsummaga arve.

Iga kümne järjestikuse täisarvu $\overline{a_1...a_n0}$, $\overline{a_1...a_n1}$, $\ldots$, $\overline{a_1...a_n9}$ hulgas on täpselt viis arvu paaritu ja viis arvu paarisarvulise ristsummaga. Seega on arvude $0,\ 1,\ \ldots,\ 999\,999$ hulgas paaris- ja paarituarvulise ristsummaga arve ühepalju. Asendades arvu 0 arvuga $1\,000\,000$, saame rohkem arve paarituarvulise ristsummaga.

12. Oletame, et leidub selline tippude ümbernummerdamise viis, et mistahes $1 \leqslant k < l \leqslant n$ korral on lõik, mis ühendab tippe numbritega k ja l enne ümbernummerdamist, ja lõik, mis ühendab samade numbritega tippe pärast ümbernummerdamist, erinevat värvi. Siis peab punaseid ja siniseid lõike olema ühepalju, s.t. lõike peab kokku olema paarisarv. Lõikude koguarv $C^2_{1991} = 995\cdot 1991$ on aga paaritu.

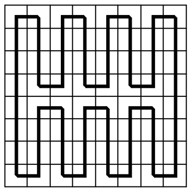
13. Loeme *kauguseks* kahe väikese kolmnurga vahel vähimat "sammude" arvu, mis kulub liikumiseks ühelt antud kolmnurgalt teisele (lugedes "sammuks" liikumist mingilt kolmnurgalt mistahes teisele kolmnurgale, millel on esimesega ühine külg). Maksimaalne kaugus kahe kolmnurga vahel on 8 ja see maksimum saavutatakse parajasti siis, kui üks neist kolmnurkadest asub suure kolmnurga mingis tipus ning teine selle tipu vastasküljel. Oletame, et meil on õnnestunud nummerdada väikesed kolmnurgad nii, et iga kahe ühist serva omava kolmnurga numbrite vahe ei ületa kolme. Siis peavad kolmnurgad 1 ja 25, 1 ja 24, 2 ja 25, 2 ja 24 olema teineteisest kaugusel 8. See on aga võimatu, sest siis peaksid kas numbrid 1 ja 2 või numbrid 24 ja 25 kuuluma suure kolmnurga ühes ja samas nurgas olevale kolmnurgale.

14. Rüütel võib toimida järgmiselt: astunud mistahes saali, väljub ta sellest paremalt esimese ukse kaudu. Teades saali, kus rüütel parajasti viibib, ning ust, mille kaudu ta sellesse saali sisenes, on siis alati võimalik üheselt määrata kogu rüütli poolt selle hetkeni läbikäidud tee. Seega ei saa rüütel sel juhul läbida sama ust samas suunas teistkordselt, ilma et ta oleks vahepeal uuesti lossi sisenenud (ja järelikult ka vahepeal lossist väljunud).

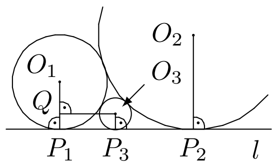
15. *Vastus*: on võimalik kõigil kolmel juhul.

Joonisel 1 on näidatud kuninga selline teekond, mis läbib iga ruutu ühe korra ja lõpeb samal ruudul, kust algab. Järelikult piisab tõestada osa c), kuna näidatud viisil liikudes saab kuningas liita kõikidel ruutudel olevatele arvudele 1 või $1+1=2$. Paneme nüüd tähele, et malelaua iga konkreetse ruudu korral on joonisel 1 näidatud kuninga teed võimalik muuta nii, et see läbiks antud ruutu kaks korda ja kõiki teisi ruute endiselt ühe korra. Niiviisi korduvalt toimides saame me muuta kõikidel ruutudel olevad arvud võrdseteks.

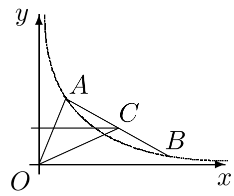
16. Olgu P_1, P_2, P_3 vastavalt punktide O_1, O_2, O_3 ristprojektsioonid sirgele l ning olgu Q punkti O_3 ristprojektsioon sirgele P_1O_1 (vt. joonist 2). Siis $|QO_3|^2 = |O_1O_3|^2 - |QO_1|^2$ ja $|P_1P_3|^2 = (r_1 + r_3)^2 - (r_1 - r_3)^2 = 4r_1r_3$. Analoogiliselt saame $|P_1P_2|^2 = 4r_1r_2{}^3$ ja $|P_2P_3|^2 = 4r_2r_3$. Kuna $|P_1P_2| = |P_1P_3| + |P_2P_3|$, siis $\sqrt{r_1r_2} = \sqrt{r_1r_3} + \sqrt{r_2r_3}$, mis ilmselt annab meile vajaliku võrduse.



Joonis 1



Joonis 2



Joonis 3

17. Olgu kiire kiirusvektor $\vec{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$. Peegeldumine igalt koordinaattasandilt muudab märgi parajasti ühel koordinaatidest α, β ja γ, seega on kiire lõplik suund vastupidine esialgsele.

18. *Vastus*: ei ole võimalik.

Ilmselt ei saa mõlemad tetraeedrid sisaldada kera keskpunkti oma sisepunktina. Tetraeedril, mis ei sisalda kera keskpunkti, leidub mingile tahule joonistatud kõrgus, mille pikkus ei ületa kera raadiust, s.o. 1. Kuna selle tetraeedri iga tahk mahub ära ringi, mille raadius pole suurem ühest, ei saa selle pindala olla suurem kui $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. Seega pole niisuguse tetraeedri ruumala suurem kui $\dfrac{1}{3} \cdot 1 \cdot \dfrac{3\sqrt{3}}{4} < \dfrac{1}{2}$.

19. Kõigepealt näitame, et kolm sirget A_1A_2, B_1B_2 ja C_1C_2 lõikuvad mingis ühes punktis O. Tõepoolest, igaüks neist sirgetest sisaldab parajasti kõik punktid, millest tõmmatud puutujalõigud kahele antud kolmest ringjoonest on võrdse pikkusega (piisab kontrollida, et kõikide selliste punktide hulk on sirge ning kahe vadeldava ringjoone lõikepunktid on nõutava omadusega). Lõikugu nüüd kaks vaadeldavat sirget punktis O, siis on punktist O tõmmatud puutujalõigud kõigile kolmele ringjoonele võrdse pikkusega ning seega läbib ka kolmas sirge punkti O.

Nüüd saame $|OA_1| \cdot |OA_2| = |OB_1| \cdot |OB_2|$ (kuna mõlemad korrutised võrduvad arvuga $|OT|^2$, kus OT on punktist O tõmmatud puutuja ringjoonele, mis läbib punkte

A_1, A_2, B_1, B_2, ning T on vastav puutepunkt). Seega $\frac{|OA_1|}{|OB_2|} = \frac{|OB_1|}{|OA_2|}$, millest järeldub kolmnurkade OA_1B_2 ja OB_1A_2 sarnasus ning võrdus $\frac{|A_1B_2|}{|A_2B_1|} = \frac{|OA_1|}{|OB_1|}$. Analoogiliselt saame $\frac{|B_1C_2|}{|B_2C_1|} = \frac{|OB_1|}{|OC_1|}$ ja $\frac{|C_1A_2|}{|C_2A_1|} = \frac{|OC_1|}{|OA_1|}$. Korrutades need kolm võrdust, saame ülesandes nõutuga samaväärse võrduse $\frac{|A_1B_2| \cdot |B_1C_2| \cdot |C_1A_2|}{|A_2B_1| \cdot |B_2C_1| \cdot |C_2A_1|} = 1$.

20. Olgu $A\Big(x_1, \frac{1}{x_1}\Big)$, $B\Big(x_2, \frac{1}{x_2}\Big)$ ja $C\Big(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{1}{2x_1} + \frac{1}{2x_2}\Big)$. On lihtne kontrollida, et vektor $\vec{v} = |OC| \cdot \overrightarrow{AC} + |AC| \cdot \overrightarrow{OC}$ (ning seega ka nurga $\angle OCA$ poolitaja) on paralleelne x-teljega. Kuna $|OA| = |AC|$, siis saame $\angle AOC = \angle ACO = 2 \cdot \angle COx$ (vt. joonist 3) ja $\angle AOx = \angle AOC + \angle COx = 3 \cdot \angle COx$.