Matemaatikaolümpiaad “Balti tee ’90”

Riias, 24. novembril 1990

1. Ringjoonele on mingis järjekorras kirjutatud arvud $1, 2, \ldots, n$. Milline on kõrvutiseisvate arvude vahede absoluutväärtuste vähim võimalik summa?

2. Ruudulise paberi ruudud on nummerdatud järgmiselt:

n							
$\cdots$							
4	10	14					
3	6	9	13				
2	3	5	8	12			
1	1	2	4	7	11		
	1	2	3	4	5	$\cdots$	m

   Leia kahe muutuja polünoom $p(m, n)$ nii, et mistahes positiivsete täisarvude m ja n korral oleks ruudus koordinaatidega (m, n) asuv arv võrdne arvuga $p(m, n)$.

3. Olgu $a_0 > 0$, $c > 0$ ja
$$a_{n+1} = \frac{a_n + c}{1 - a_n c}\,, \quad n = 0,\, 1, \ldots .$$
   Kas on võimalik, et selle jada esimesed 1990 liiget $a_0, a_1, \ldots, a_{1989}$ on kõik positiivsed, kuid $a_{1990} < 0$?

4. Tõesta, et mistahes reaalarvude $a_1, a_2, \ldots, a_n$ korral kehtib võrratus
$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{i + j - 1} \geqslant 0\,.$$

5. Tähistagu $*$ tehet, mis seab igale reaalarvude paarile (a, b) vastavusse reaalarvu $a * b$ (näit. $a*b = a+b^2-17$). Leia võrdus, mis on tõene (muutujate kõigi võimalike väärtuste korral) alati, kui tehe $*$ on kommutatiivne või assotsiatiivne, ent võib olla väär muudel juhtudel.

6. Olgu $ABCD$ nelinurk, $|AD| = |BC|$, $\angle A + \angle B = 120^\circ$ ning olgu P selline punkt väljaspool nelinurka $ABCD$, et punktid P ja A asuvad teine teisel pool sirget DC ja kolmnurk DPC on võrdkülgne. Tõesta, et kolmnurk APB on samuti võrdkülgne.

7. Kumera viisnurga iga külje keskpunkt on lõigu abil ühendatud ülejäänud kolme tipu poolt moodustatud kolmnurga mediaanide lõikepunktiga. Tõesta, et kõik viis sellist lõiku lõikuvad ühes punktis.

8. Olgu P punkt kolmnurga ABC ümberringjoonel. On teada, et punktist P sirgetele AB, BC ja CA tõmmatud ristlõikude aluspunktid asuvad ühel sirgjoonel (nn. Simpsoni sirgel). Tõesta, et kui punktid P_1 ja P_2 on kolmnurga ümberringjoone mingi diameetri otspunktid, siis neile vastavad Simpsoni sirged on risti.

9. Kaks võrdset kolmnurka on joonestatud ellipsisse nii, et nende kõik tipud asuvad ellipsil. Kas need kolmnurgad peavad olema sümmeetrilised ellipsi keskpunkti või ühe telje suhtes?

10. Sirgel t on märgitud ühiklõik AB. Lõiku AB liigutatakse tasandil nii, et see jääb kogu aeg paralleelseks sirgega t, punktide A ja B trajektoorid ei lõiku omavahel ja lõpuks jõuab lõik tagasi sirgele t. Kui kaugel võib punkt A nüüd olla oma esialgsest asukohast?

11. Tõesta, et täisarvuliste kordajatega polünoomi mistahes täisarvulise juure absoluutväärtus ei ületa maksimumi selle polünoomi kordajate absoluutväärtustest.

12. Olgu m ja n positiivsed täisarvud. Tõesta, et arv $25m + 3n$ jagub arvuga 83 siis ja ainult siis, kui $3m + 7n$ jagub arvuga 83.

13. Tõesta, et võrrandil $x^2 - 7y^2 = 1$ on lõpmata palju naturaalarvulisi lahendeid.

14. Kas eksisteerib 1990 paarikaupa ühisteguriteta arvu nii, et kõikvõimalikud summad kahe- või rohkema kaupa nendest arvudest on kordarvud?

15. Tõesta, et ükski arvudest kujul

$$F_n = 2^{2^n} + 1 , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

ei ole täisarvu kuup.

16. Ruudulisele paberile (ruudu küljepikkusega 1) on joonestatud kinnine murdjoon nii, et selle lülid asuvad paberi joontel ja kõikide lülide pikkused on paaritud arvud. Tõesta, et selle murdjoone lülide arv jagub neljaga.

17. Kahes kuhjas on vastavalt 72 ja 30 kompvekki. Kaks õpilast võtavad kordamööda mingi hulga kompvekke, kuid vaid ühest kuhjast korraga. Võetud kompvekkide arv peab seejuures iga kord olema teises kuhjas olevate kompvekkide arvu kordne. Kumb õpilane, kas alustaja või tema vastane, saab õige strateegia korral tagada endale viimase kompveki võtmise ühest kuhjast?

18. Ruudustikku suurusega 101×101 ruutu on kirjutatud naturaalarvud $1, 2, \ldots, 100, 101$, iga arv 101 korda. Tõesta, et leidub selline rida või veerg, mis sisaldab vähemalt 11 erinevat arvu.

19. Milline on suurim võimalik arv hulga $\{1, 2, \ldots, 2n + 1\}$ selliseid alamhulki, et nende seast võetud mistahes kahe alamhulga ühisosa koosneb ühest või mitmest järjestikusest täisarvust?

20. Loominguline ülesanne: mõtle ise välja üks olümpiaadiülesanne koos selle lahendusega.

Ülesannete lahendused

1. Olgu arvud $1, 2, \ldots, n$ kirjutatud ringjoonele järjekorras $a_1 = 1,\ a_2,\ \ldots, a_k = n$, $a_{k+1},\ \ldots,\ a_n$, siis kõrvutiasuvate arvude vahede absoluutväärtuste summa on

$$\begin{aligned}&|1-a_2|+|a_2-a_3|+\ldots+|a_{k-1}-n|+|n-a_{k+1}|+\ldots+|a_n-1| \geqslant \\ &\quad \geqslant |1-a_2+a_2-a_3+\ldots+a_{k-1}-n|+|n-a_{k+1}+\ldots+a_n-1| = \\ &\quad = |1-n|+|n-1| = 2n-2\ .\end{aligned}$$

Minimaalne väärtus $2n-2$ saavutatakse näiteks siis, kui arvud on ringjoonele kirjutatud kasvavas järjekorras.

2. Ruut koordinaatidega (m, n) asub tabelis $(n+m-1)$-l diagonaalil altpoolt lugedes n-ndal kohal ning sisaldab seega arvu

$$P(m,n) = \sum_{i=1}^{n+m-2} i + n = \frac{(n+m-1)(n+m-2)}{2} + n\ .$$

3. Ilmselt on võimalik leida nurgad $0 < \alpha, \beta < 90^\circ$ nii, et $\tan\alpha > 0$, $\tan(\alpha+\beta) > 0$, $\ldots$, $\tan(\alpha + 1989\beta) > 0$ ja $\tan(\alpha + 1990\beta) < 0$. Nüüd piisab tähele panna, et võttes $a_0 = \tan\alpha$ ja $c = \tan\beta$ saame $a_n = \tan(\alpha + n\beta)$.

4. Vaatleme polünoomi $P(x) = a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1}$, siis saame $P^2(x) = \sum_{k,l=1}^{n} a_k a_l x^{k+l-2}$ ja $\int_0^1 P^2(x) = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{a_k a_l}{k+l-1}$.

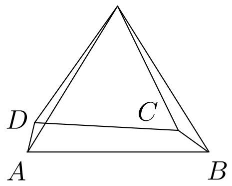
5. Üheks selliseks võrduseks on $x * (x * x) = (x * x) * x$, mis on ilmselt tõene, kui $*$ on mistahes kommutatiivne või assotsiatiivne tehe, kuid ei kehti üldiselt, näiteks: $1 - (1-1) \neq (1-1) - 1$.

6. Paneme tähele, et $\angle ADC + \angle CDP + \angle BCD + \angle DCP = 360^\circ$ (vt. joonist 1). Seega $\angle ADP = 360^\circ - \angle BCD - \angle DCP = \angle BCP$. Kuna $|DP| = |CP|$ ja $|AD| = |BC|$, siis kolmnurgad ADP ja BCP on kongruentsed ja $|AP| = |BP|$. Peale selle $\angle APB = 60^\circ$, kuna $\angle DPC = 60^\circ$ ja $\angle DPA = \angle CPB$.

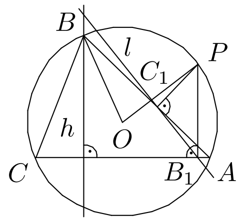
7. Näitame, et viisnurga (kui selle tippudesse asetatud viiest võrdsest massist koosneva süsteemi) massikese asub igal vaadeldaval lõigul. Tõestuseks jagame selle masside süsteemi kaheks alamsüsteemiks, millest üks koosneb viisnurga ühe külje otspunktides olevatest massidest ja teine kolmest ülejäänud massist kolmnurga tippudes. Ülesandes mainitud lõik ühendab nende kahe alamsüsteemi massikeskmeid, seega läbib see lõik ka kogu süsteemi massikeset.

8. Olgu O kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt ja $\angle B$ selle suurim nurk (seega on $\angle A$ ja $\angle C$ teravnurgad). Edasi, olgu B_1 ja C_1 punktist P vastavalt külgedele AC ja AB tõmmatud ristlõikude aluspunktid ning α nurk punkti P Simpsoni sirge l ja

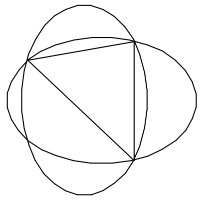
kolmnurga küljele AC tõmmatud kõrguse h vahel. Piisab tõestada, et $\alpha = \dfrac{1}{2}\angle POB$. Kõigepealt paneme tähele, et punktid P, C_1, B_1 ja A asuvad ühel ringjoonel. Nüüd tuleb vaadelda erinevaid alajuhte, olenevalt nende punktide järjekorrast sellel ringjoonel ja punkti P asukohast kolmnurga ABC ümberringjoonel. Joonis 2 esitab ühte neist alajuhtudest: siin $\alpha = \angle PB_1C_1 = \angle PAB = \dfrac{1}{2}\angle POB$. Ülejäänud alajuhud ei erine sellest oluliselt.



Joonis 1



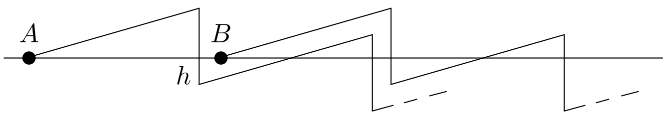
Joonis 2



Joonis 3

9. Ei pea (vt. joonist 3, kus näidatud kaks ellipsit on võrdsed).

10. Punkt A võib jõuda suvalisele kaugusele oma algasendist — vt. joonist 4, kus kõrguse h võime valida kuitahes väikese.



Joonis 4

11. Olgu $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ täisarvuliste kordajatega polünoom ja k vähim selline indeks, et $a_k \neq 0$, s.t. $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_k x^k$. Kui c on polünoomi $P(x)$ täisarvuline juur, siis $P(x) = (x - c) \cdot Q(x)$, kus $Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_k x^k$ on samuti täisarvuliste kordajatega polünoom, $a_n = b_{n-1}$ ja $a_k = -b_k \cdot c$. Kuna $a_k \neq 0$, siis ka $b_k \neq 0$ ja seega $|c| \leqslant |a_k|$.

12. Kasutame võrdust $2 \cdot (25x + 3y) + 11 \cdot (3x + 7y) = 83x + 83y$.

13. Antud võrrandi mistahes lahendi (m, n) korral on $m^2 - 7n^2 = 1$ ja

$$1 = (m^2 - 7n^2)^2 = (m^2 + 7n^2)^2 - 7 \cdot (2mn)^2 .$$

Seega on $(m^2 + 7n^2, 2mn)$ samuti selle võrrandi lahend. Nüüd piisab näidata, et võrrandil $x^2 - 7y^2 = 1$ on vähemalt üks lahend — selleks sobib näiteks $x = 8$, $y = 3$.

14. Sellised arvud on olemas. Olgu $M = 1990!$ ning vaatleme arvujada $1+M$, $1+2M$, $1+3M$, ... Iga naturaalarvu $2 \leqslant k \leqslant 1990$ korral jagub mistahes summa S, mis koosneb k antud jadasse kuuluvast liidetavast (need ei pea tingimata erinevad olema) arvuga $k < S$ ja on seega kordarv. Jääb veel näidata, et me saame sellest jadast valida 1990 paarikaupa ühisteguriteta arvu $a_1, \ldots, a_{1990}$. Tõepoolest, olgu $a_1 = 1+M$, $a_2 = 1+2M$ ja kui arvud $a_1, \ldots, a_n$ on juba valitud, siis võtame $a_{n+1} = 1 + a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot M$.

15. Olgu k ja n sellised arvud, et $2^{2^n} + 1 = k^3$. Siis k peab olema paaritu arv ja $2^{2^n} = k^3 - 1 = (k-1)(k^2+k+1)$. Paaritu arv $k^2+k+1 > 1$ ei saa aga olla arvu 2^{2^n} teguriks.

16. Niisugusel murdjoonel peab olema võrdne arv horisontaalseid ja vertikaalseid lülisid, seega piisab näidata, et vertikaalseid lülisid on paarisarv. Läbime kogu murdjoone mingis suunas ja nimetame iga vertikaalse lüli kas "tõusvaks" või "laskuvaks" vastavalt sellele, millises suunas me selle läbisime. Kuna "tõusvate" ja "laskuvate" lülide pikkuste summa on võrdne ja iga lüli on paarituarvulise pikkusega, siis on meil mõlemat liiki vertikaalseid lülisid paaris või paaritu arv, sõltuvalt nende pikkuste summa paarsusest.

17. Paneme tähele, et ühel mängijatest peab olema "võitev" strateegia. Oletame, et see on mängijal, kes teeb teise käigu. Siis peab see strateegia tagama talle viimase kompveki võtmise ka sel juhul, kui alustaja võtab oma esimesel käigul $2 \cdot 30$ kompvekki. Juhul, kui alustaja võtab $1 \cdot 30$ kompvekki, pole teisel mängijal muud valikut, kui võtta 30 kompvekki samast kuhjast, ning seejärel saab alustaja kasutada sama strateegiat, et tagada endale viimase kompveki võtmine. Saadud vastuolu näitab, et "võitev" strateegia on alustajal.

18. Olgu a_k nende ridade ja veergude koguarv, mis sisaldavad arvu k vähemalt ühe korra. Kuna iga naturaalarvu i korral kehtib võrratus $i \cdot (20 - i) < 101$, siis $a_k \geqslant 21$ iga $k = 1, 2, \ldots, 101$ korral. Seega $a_1 + \ldots + a_{101} \geqslant 21 \cdot 101 = 2121$. Teiselt poolt, kui iga rida ja iga veerg sisaldab mitte rohkem kui 10 erinevat arvu, siis saame $a_1 + \ldots + a_{101} \leqslant 202 \cdot 10 = 2020$ — vastuolu.

19. Olgu $A_1, \ldots, A_s$ ülesande tingimusi rahuldavad alamhulgad ning $A_i = \{a_{i1}, \ldots, a_{i,k_i}\}$, kus $a_{i1} < \ldots < a_{i,k_i}$. Asendades iga A_i alamhulgaga $A'_i = \{a_{i1}, a_{i1}+1, \ldots, a_{i,k_i}-1, a_{i,k_i}\}$ (s.t. lisades sellele hulgale kõik vahepealsed puuduvad elemendid), saame komplekti $A'_1, \ldots, A'_s$, mis samuti rahuldab nõutud tingimusi. Olgu nüüd b_i ja c_i vastavalt vähim ja suurim element alamhulgas A'_i, siis $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant s} c_i \geqslant \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant s} b_i$, kuna vastasel juhul leiduksid alamhulgad A'_k ja A'_l, mis ei lõiku. Seega leidub element $a \in \bigcap\limits_{1 \leqslant i \leqslant s} A'_i$.

Kuna hulga $\{1, 2, \ldots, 2n+1\}$ selliste alamhulkade arv, mis sisaldavad elementi a ja koosnevad k järjestikusest täisarvust, ei ületa arvu $\min(k, 2n+2-k)$, saame $s \leqslant (n+1) + 2 \cdot (1 + 2 + \ldots + n) = (n+1)^2$. Maksimaalse väärtuse $s = (n+1)^2$ saame, kui võtame $a = n + 1$.